

東京音楽大学リポジトリ

Tokyo College of Music Repository

離散化による音の伝播の数値解析法について

メタデータ	言語: ja 出版者: 公開日: 1990-01-01 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: メールアドレス: 所属:
URL	https://tokyo-ondai.repo.nii.ac.jp/records/709

This work is licensed under a Creative Commons
Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0
International License.



離散化による音の伝播の数値解析法について

村 中 洋 子

1. はじめに

昔から、意志の伝達や危険感知の情報として、音と人間とのかかわり合いは深い。物理現象としての音が、ガリレオ、ニュートン、コーシー、レイリなどにより、学問として本格的に捉えられ始めたのは、17世紀、ルネッサンスの後期である。ニュートンは音波を力学の問題として扱い、空気中の音速が体積弾性率と密度の比の平方根であることを明らかにした。その後、微積分学やフーリエ級数などの理論の確立により、さらに音に関する解析が展開されていった。

現在にいたっては、音の解析は、大規模な開発事業や、自動車、航空機、鉄道による周辺地域の騒音の評価など、室内の音響効果の把握といった工学的諸問題には不可欠の要素となってきた。実際の音場解析には、線形波動方程式から時間、空間分離によって得られた、いわゆるヘルムホルツ方程式が用いられ、境界要素法などといった手法によって解かれることが多い。現にいくつかの解析コードが商品化(*1)され、計算機によるシミュレーションが行われ騒音対策に利用されている。

これらの方法の問題点は、定常音波を仮定していることと、流れの干渉による非線形的な効果を見逃していることにある。即ち、定常的に存在する音源から空間に放射された空気圧分布は分っていても、瞬時に発生する爆風音や衝撃音などの時間的な変化の伝播状態を知ることはできない。

流体力学の分野では、昔から、オイラー方程式に代表される圧縮性流体力学方程式の解析手法に、有限差分法、有限体積法といった離散化による方法が多く用いられてきた。離散化による方法とは、解析しようとする空間を規則正しい計算格子(網目)に分割し、解くべき方程式を各格子点上の関係式に置き換えて、コンピュータなどによって値を計算することである。結果として圧力、密度といった流れの物理量は、各格子点の代表値として得られ、物理量の変動をシミュレーションでさうるのである。

音波の伝播を支配する線形波動方程式は、圧縮性流体力学のオイラー方程式から微小変動を仮定して導かれた方程式である。(第2章参照)したがって、この波動方程式の解法にも、定常波、非定常波や、線形、非線形問題を問わない差分法に代表される離散化の方法を適用する

ことは可能であるが、音場の解析には離散化の方法は不向きであるとされてきた。

通常の流体現象における物理量の変動は音波に対して格段に強い。例えば、風が吹いてくればそれを空気の圧力として肌で感じ取ることはできる。音は、耳の鼓膜で感じ取る以外、身体ではその圧力変動を捉えることはできない。強い物理量の変動解析には、ある程度の格子点があれば良い結果が得られると予測されるが、音波のような微小変動を取り扱う場合、離散化による解析では、格子点が不足すると解の精度が著しく劣化するため、格子点の数を多くして数値誤差によって生まれる減衰を押さえる必要がある。格子点を密にすることで計算に時間がかかり、減衰を押さえにくいという点が、音場の離散化による解析は不向きとされた理由であるが、大型計算機のハード分野はもちろんのこと、最近の流体力学による数値計算技術の進歩はめざましく、離散化による誤差を今までの方法とは比べものにならないほど小さく押さえることを可能にしつつある (*2, *3)。

最近の離散化の方法を利用することによって、今までの音場解析に対する数値計算技術の欠点を補うことができれば、時間発展問題の解として非定常な音場を解析することと、将来的に非線形性を取り入れた解析も可能にする。さらに、一般座標系の考え方を活用すれば、たやすく様々な形状における音場の解析を扱うことができる。

このような事情を背景に、本研究では、

- ・ 1次元における解析の場の流体力学方程式から、線形波動方程式を導く過程を示す。(2章)
- ・ 2章で得られた波動方程式を、非定常波を仮定し、様々な数値計算法を用いて、シミュレーションを行う。(3章)
- ・ その結果を検討し、特に、最近の高次精度風上差分法に焦点を置き、音場解析における離散化の方法の可能性をみる。(4章)

を行い、音波の伝播における離散化の有効性を探る一助とする。

2. 基礎方程式と離散化

2.1 基礎方程式の導出

まず、1次元の場における圧縮性流体力学方程式から、微小変動の仮定を導入して、音の伝播を支配する線形波動方程式を導く。1次元圧縮性非粘性流体を支配する方程式は以下の3つの方程式に、気体の状態方程式

$$\tilde{p} = \tilde{\rho} R \tilde{T} \quad R: \text{理想気体定数}$$

を加えたものである。

$$\text{連続の式} \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (\tilde{\rho} \tilde{u}) = 0 \quad (1)$$

$$\text{運動量保存の式} \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (\tilde{\rho} \tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (\tilde{p} + \tilde{\rho} \tilde{u}^2) = 0 \quad (2)$$

$$\text{エネルギー保存の式} \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (\tilde{e}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} ((\tilde{e} + \tilde{p}) \tilde{u}) = 0 \quad (3)$$

ここで $\sim$ は次元を含んだ物理量を意味する。 $\tilde{\rho}$ は密度、 $\tilde{u}$ は速度、 $\tilde{p}$ は圧力、 $\tilde{e}$ は気体の内部エネルギーである。熱の出入りを考慮しない場合、エネルギー保存の式は解析的な式で置き換えられ、さらに音の伝播に関しては等エントロピーを仮定すると、圧力と速度、密度の関係式

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} + \frac{1}{2} (\tilde{u}^2) = \text{const.} \quad \gamma: \text{比熱比}$$

を与えるため(3)式は実質的に解く必要がない。

次に無次元化を導入する。

$$\tilde{t} = t \infty t, \quad \tilde{x} = Lx, \quad \tilde{\rho} = \rho \infty \rho, \quad \tilde{u} = u \infty u, \quad \tilde{p} = p \infty c^2 \infty p \quad (4)$$

但し、 $t \infty = L/c \infty$

ここに、 L は代表長さ、 $c \infty$ は音速である。(4)式を(1)、(2)に代入して整理すると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho u^2) = 0 \quad (6)$$

となり、元の物質質量を含んだ方程式と同じ形に書ける。ここで音の発生によって生ずる変動項 ρ' 、 p' 、 u' は小さいものとして、微小変動の式を導入する。即ち、

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p', \quad u = u_0 + u' \quad (7)$$

と置き、変動の高次の項を無視する。前に述べたように等エントロピーの仮定のもとでは

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \approx c_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x} \quad (8)$$

と近似できることを利用すると、(5)式(6)式は次のように微小変動 ρ' 、 u' に関する式として書き換えられる。

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

仮に、 p の変動 p' が計算したければ、

$$p' = c_0^2 \rho' \quad (11)$$

として得られる。式(9), (10)は行列系に書くと、

$$\frac{\partial q}{\partial t} + A \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

但し、

$$q = \begin{pmatrix} \rho' \\ u' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \rho_0 \\ c_0^2/\rho_0 & 0 \end{pmatrix}$$

通常(9), (10)の式はさらに時間微分、空間微分を施すことで、 ρ' 及び p' に関する 2 階の線形波動方程式となり、ヘルムホルツ分解により、時間、空間の変数分離を行い、定常な空間内の音場を決めるのに用いられている。ここでは、非定常な音の伝播を計算することを目的としているので式(12)をこのまま解くことを考える。

行列 A は対角化可能で、 $A = R\Lambda R^{-1}$ と書ける。波の伝播速度（特性速度）は、行列 A を対角化したときの固有値として得られる。即ち、このときの Λ の各要素である。したがって、 A の固有値 λ と右固有ベクトル R 、左固有ベクトル R^{-1} を求めると、

$$\lambda = \pm c_0, \quad R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c_0/\rho_0 & -c_0/\rho_0 \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \rho_0/c_0 \\ 1 & -\rho_0/c_0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} c_0 & 0 \\ 0 & -c_0 \end{pmatrix}$$

である。

当然のことながら伝播速度は音速 c_0 で土があるから前方、後方に伝播する波が存在しうることがわかる。

2.2 離散化と数値計算法

研究の目的が、離散化手法の音場解析への可能性を議論することにあるので、過去のいくつかの計算法と最近の計算法をいくつか利用し、計算結果を比較検討する。これらの計算法の概略（*4）を以下に示す。尚、 Δt は時間分割の積分幅、 Δx は空間分割の積分幅を意味している。

(1) LAX の方法

$$q_j^{n+1} = \frac{1}{2} (q_{j+1}^n + q_{j-1}^n) - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) A (q_{j+1}^n - q_{j-1}^n) \quad (14)$$

以下、上添字 n は $t = n\Delta t$ における値を、下添字 j は $x = j\Delta x$ における値を意味している。(14) 式を $t = 0$ から、漸近的に時間発展的な解を求めていくことで各時間に対する全空間の解が得

られる。

(2) MacCormack の方法

MacCormack の方法は線形問題については、Lax-Wendroff の方法と呼ばれているものと同じである。この方法では、2 段階で Δt の積分を行う。

$$\text{predictor step: } \bar{q}_j = q_j^n - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) A (q_{j+1}^n - q_j^n) \quad (15)$$

$$\text{corrector step: } q_j^{n+1} = q_j^n + \frac{1}{2} [q_j^n + \bar{q}_j - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) A (\bar{q}_j - \bar{q}_{j-1})] \quad (16)$$

(3) Yee-Harten による高次精度風上差分法

$$q_j^{n+1} = q_j^n - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) (\tilde{f}_{j+1/2}^n - \tilde{f}_{j-1/2}^n) \quad (17)$$

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} [(f_{j+1}^n + f_j^n) + R_{j+1/2}^n \Phi_{j+1/2}^n] \quad (18)$$

ここにベクトル Φ の各成分は次のように書かれる。

$$\phi_{j+1/2}^l = |\lambda_{j+1/2}^l| (g_j^l + g_{j+1}^l) - |\lambda_{j+1/2}^l + \gamma_{j+1/2}^l| \alpha_{j+1/2}^l$$

$$\alpha_{j+1/2}^n = R_{j+1/2}^{-1n} (q_{j+1}^n - q_j^n)$$

(4) MUSCL を用いた高次精度風上差分法

$$q_j^{n+1} = q_j^n - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) (\tilde{f}_{j+1/2}^n - \tilde{f}_{j-1/2}^n) \quad (19)$$

$$\text{但し, } \tilde{f}_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} [(f(q_R^n) + f(q_L^n)) - |A|_{j+1/2}^n (q_R^n - q_L^n)] \quad (20)$$

q_R, q_L は $j+1/2$ の位置の右, 左での未知量で MUSCL 内挿法によって q_{j-1}, q_j, q_{j+1} 等から得られる。

3. 数値計算の条件と問題設定

物理的な状況として、長さ 1 m を代表長さ L として、約 8 m 程度の距離での波の伝播を考える。音源としては、15°C の空気中の音速を 340 m/s として、周波数 212.5 Hz (波長 1.6 m) の孤立波を仮定する。問題が線形なので、強さは任意であるから 1.0 とする。波の形としては、全ての波形はフーリエ展開によって正弦波の合成関数で表わされるので、正弦波の形状 (第 1 図(a))

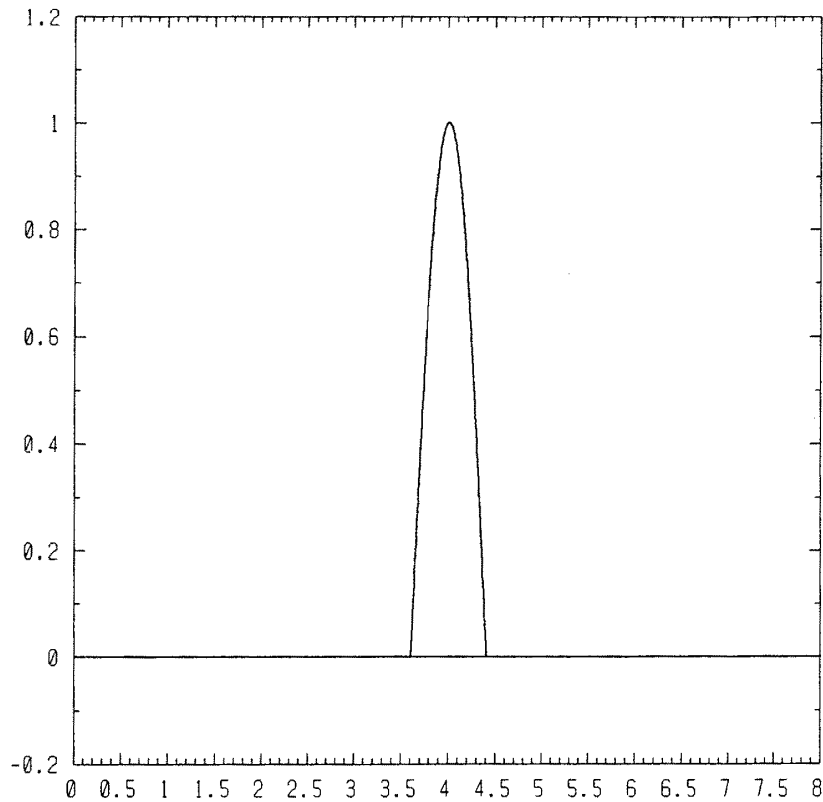
参照) について考える。

次のような初期条件を与えて ρ' , u' の時間変化を漸近的に求めていく。ここでは ρ' の分布にのみ着目してその時間変化を追う。

$$\left\{ \begin{array}{ll} u' = 0 \\ \rho' = 0 & x < 4.0 - \frac{c}{2} \\ \rho' = \cos \left(\pi \frac{x-4.0}{c} \right) & 4.0 - \frac{c}{2} < x < 4.0 + \frac{c}{2} \\ \rho' = 0 & x > 4.0 + \frac{c}{2} \end{array} \right.$$

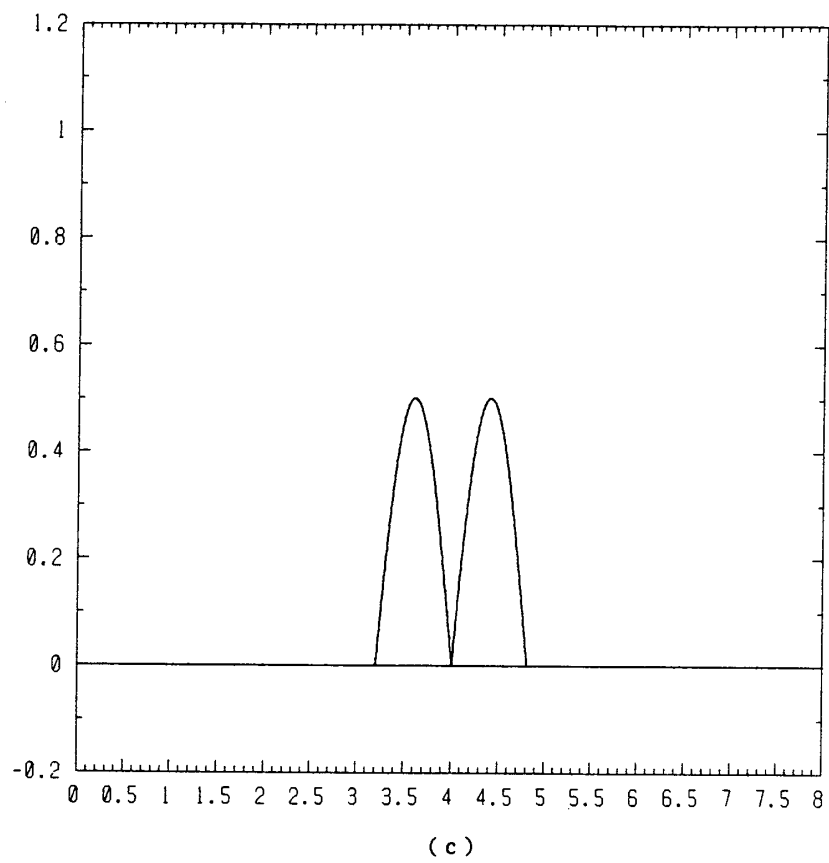
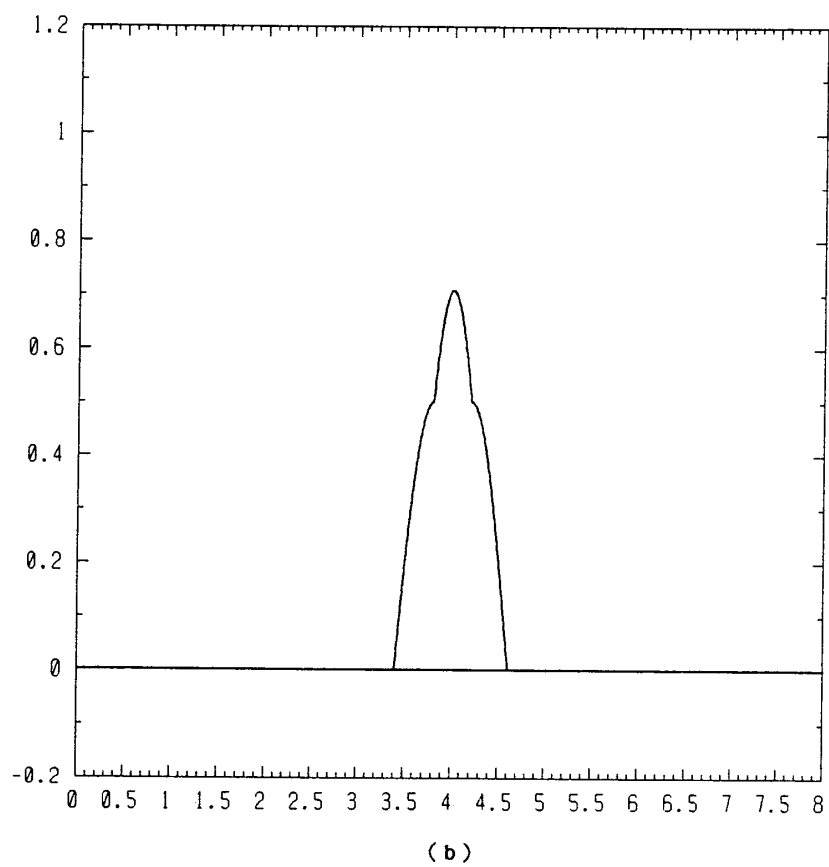
ここでは $c=0.8$ としている。

第1図～3図に密度擾乱 ρ' の厳密解の時間発展の様子を示す。(a)から(e)に向かって時間が進んでいる。瞬間的に発生した1の波の強さは次第に2つの波にと分離され、右方向、左方向にそれぞれ音速 $\pm c_0$ で伝播していく。この伝播は2次元問題では円周状に、3次元問題では球状に伝播するため、波の強さは距離に応じて減少していくが、1次元の問題では、波の強さは各々0.5にさがり、そのまま左右へ伝播していく。

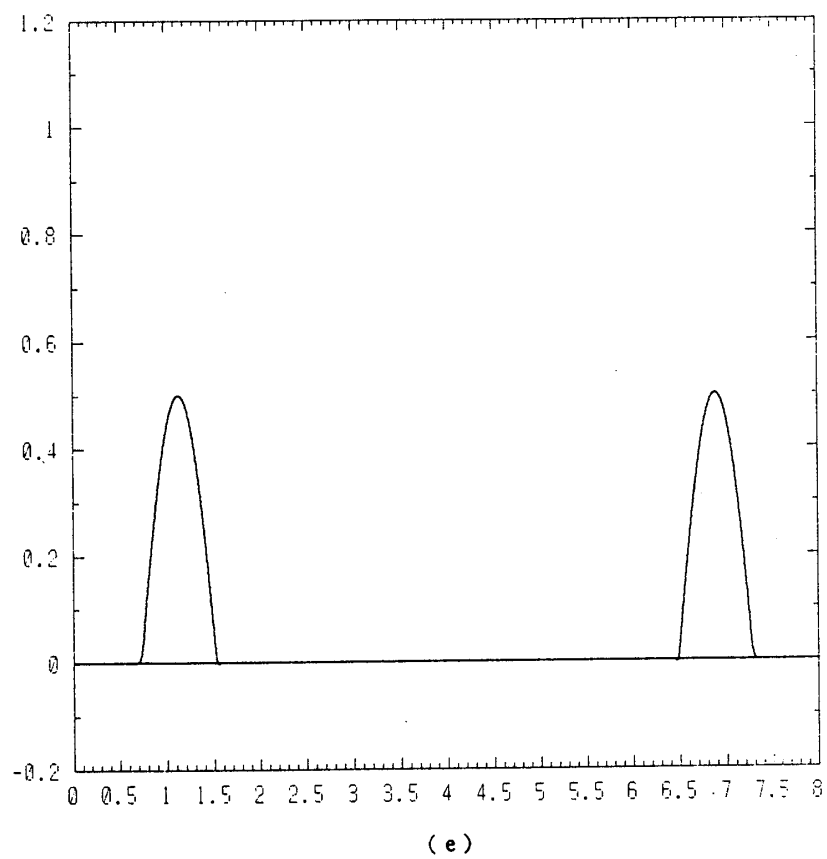
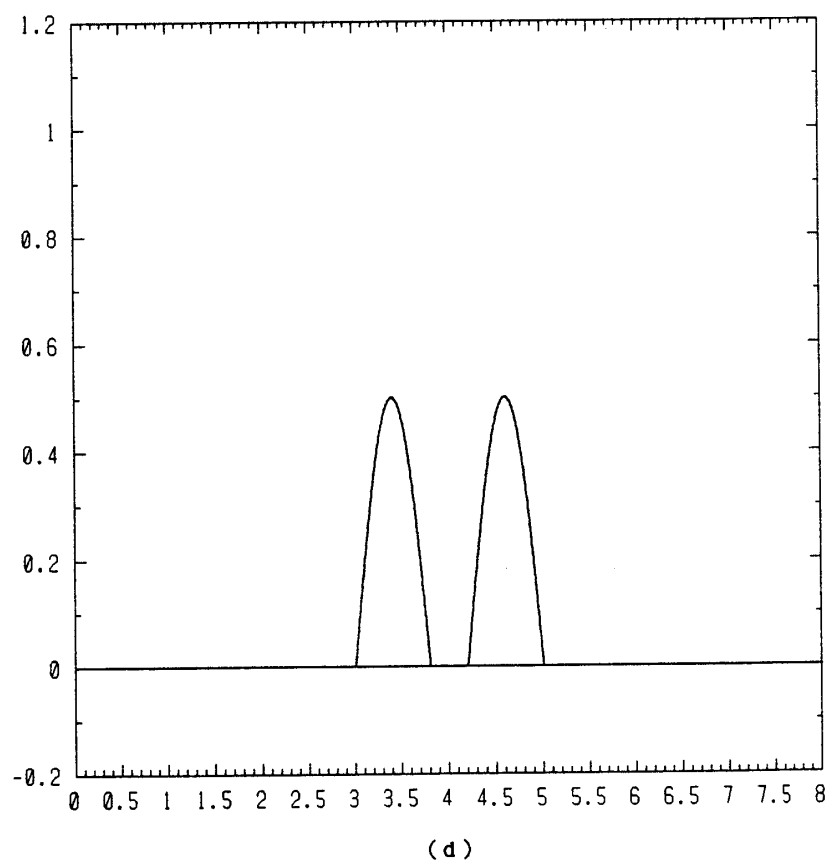


(a)

第1図



第2図



第3図

4. 計算結果と検討

4.1 計算結果

第4図～10図は、8 m 区間に

- 101ポイント ($\Delta x = 8$ cm)
- 201ポイント ($\Delta x = 4$ cm)
- 401ポイント ($\Delta x = 2$ cm)

の三つの場合の格子点を取り、 $\Delta t = 2.32 \times 10^{-4}$ 秒の10ステップごとに

(1) LAX

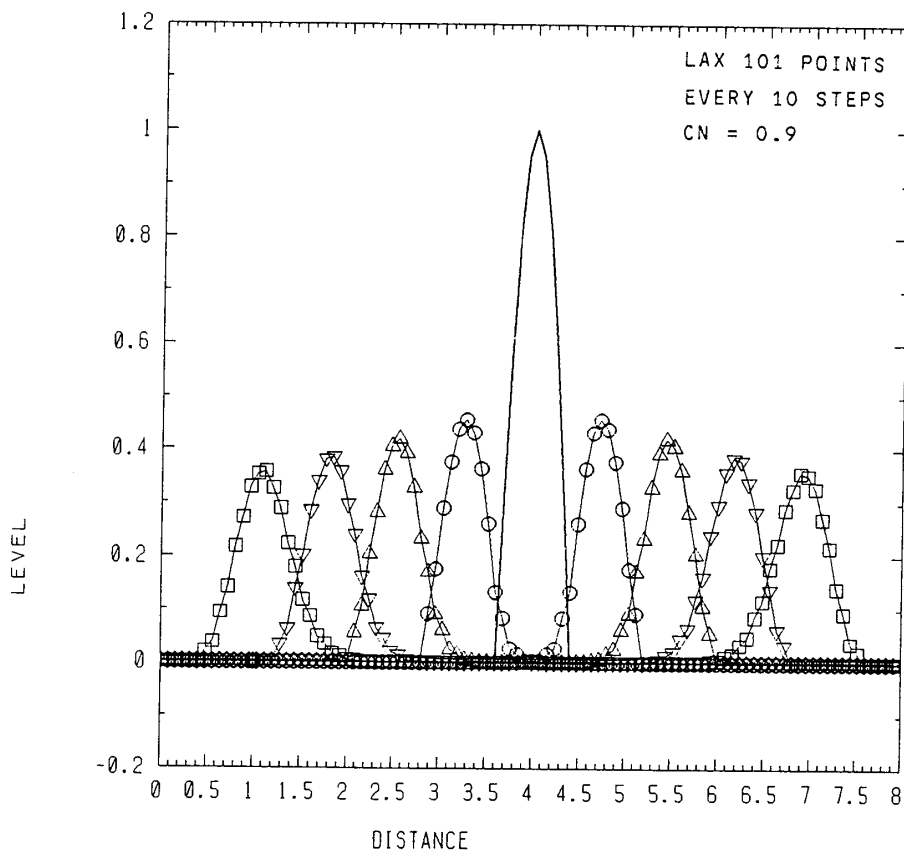
(2) MacCormack

(3) Yee-Harten

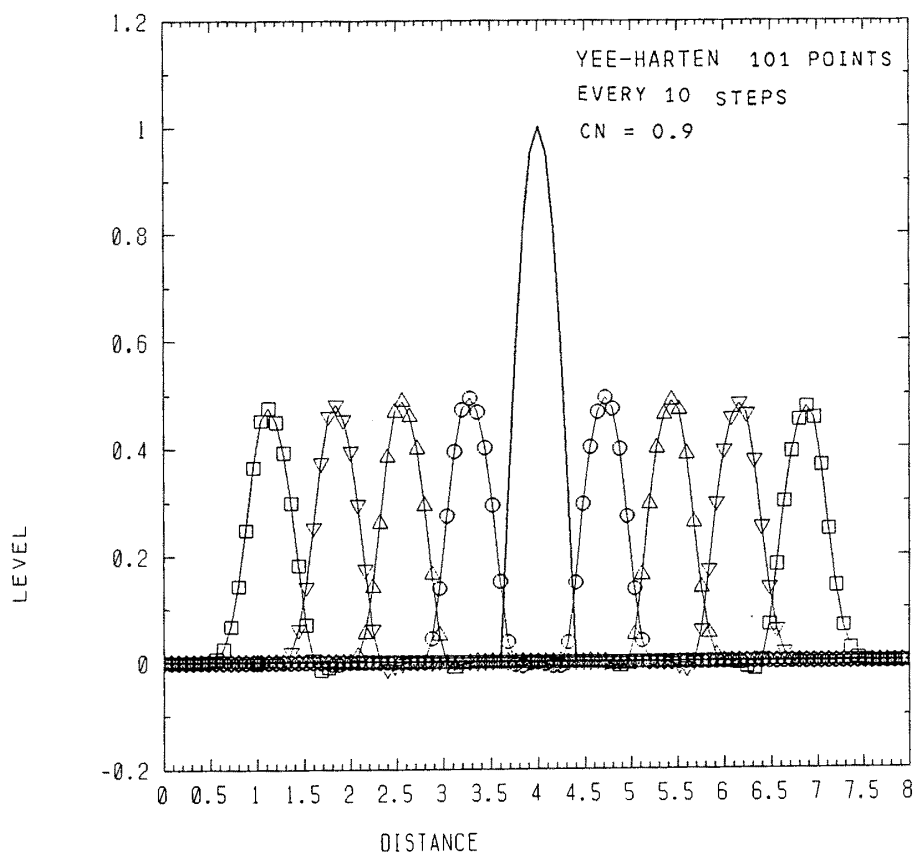
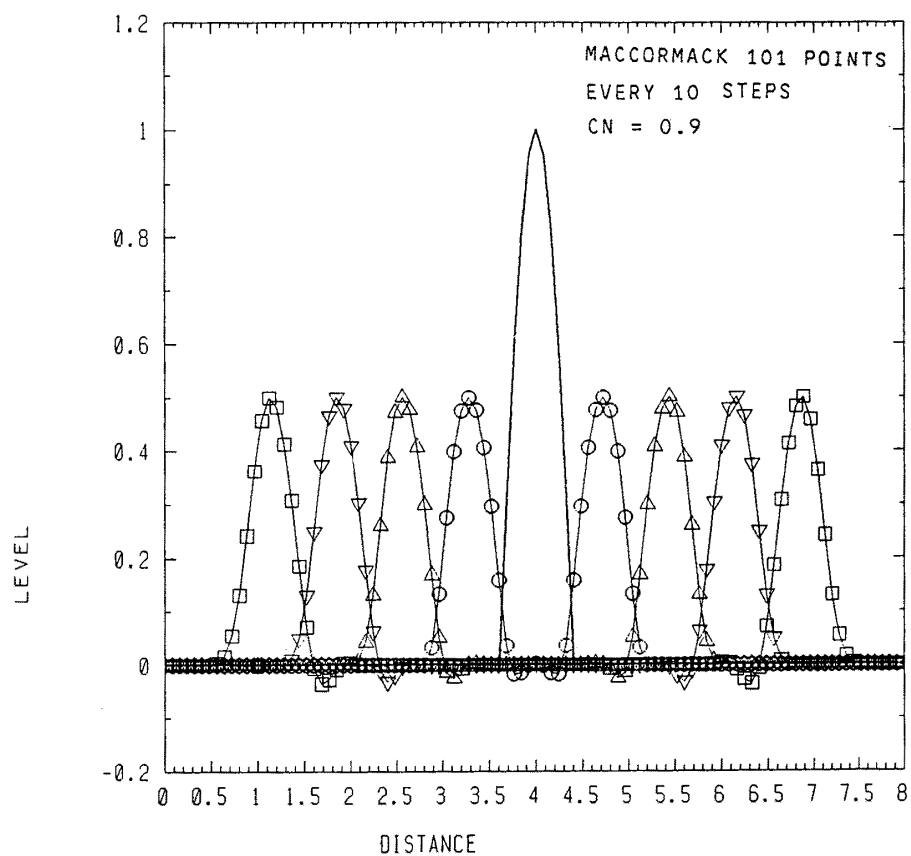
30ステップごとに

(4) MUSCL

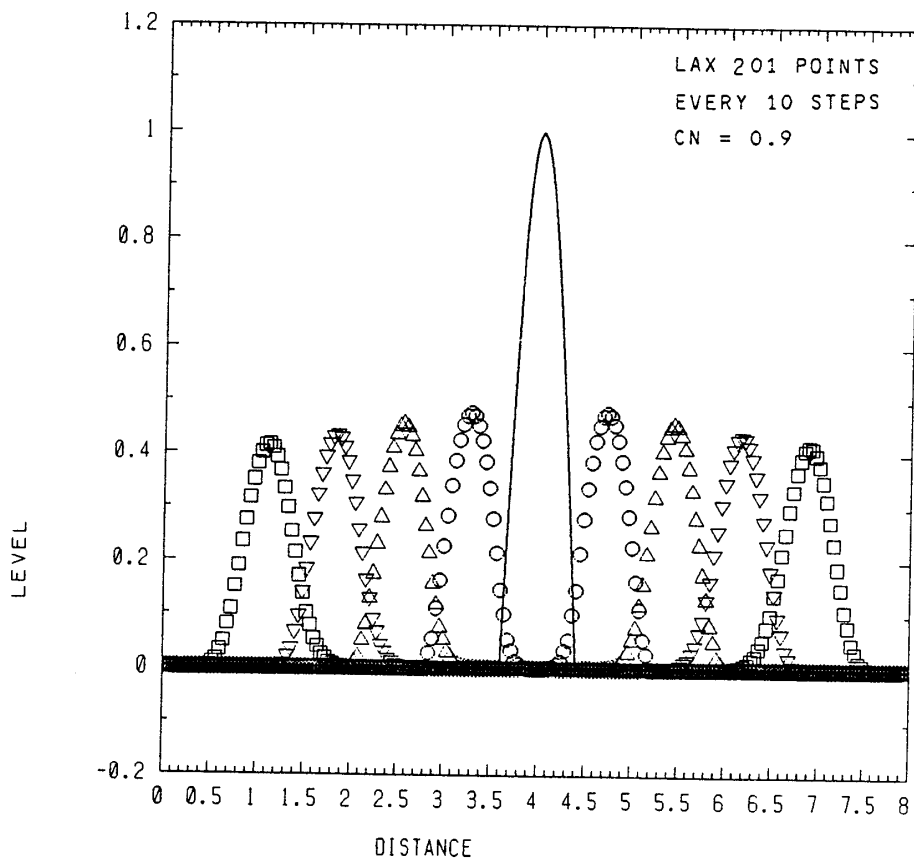
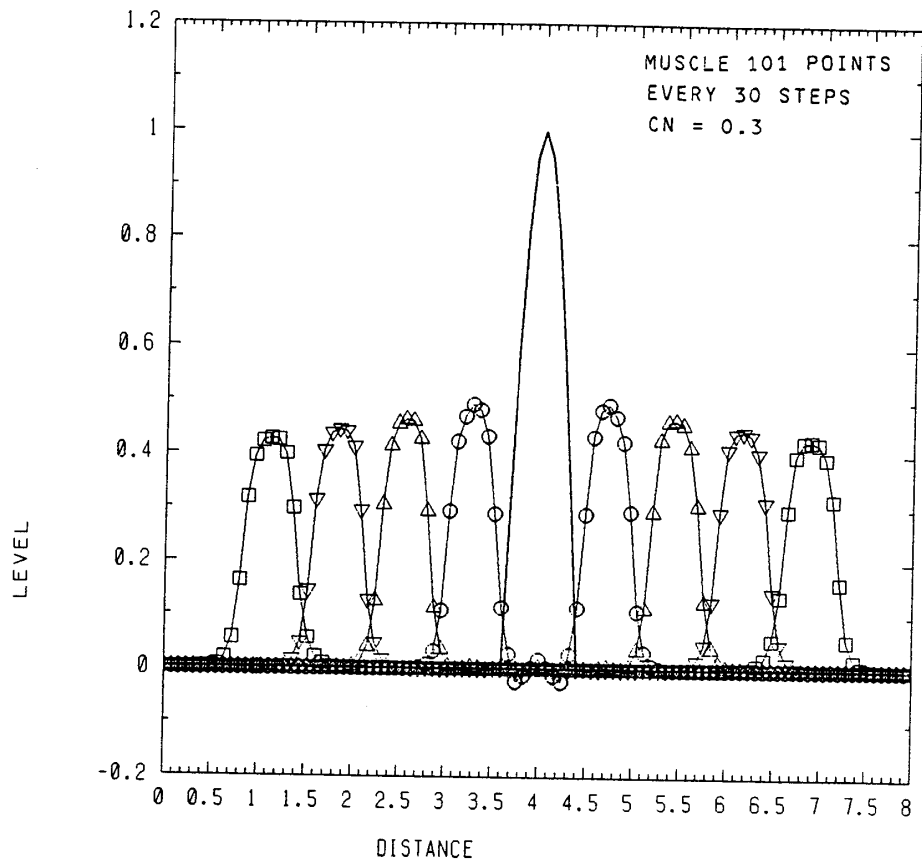
の計算手法を使ってシミュレーションした結果である。



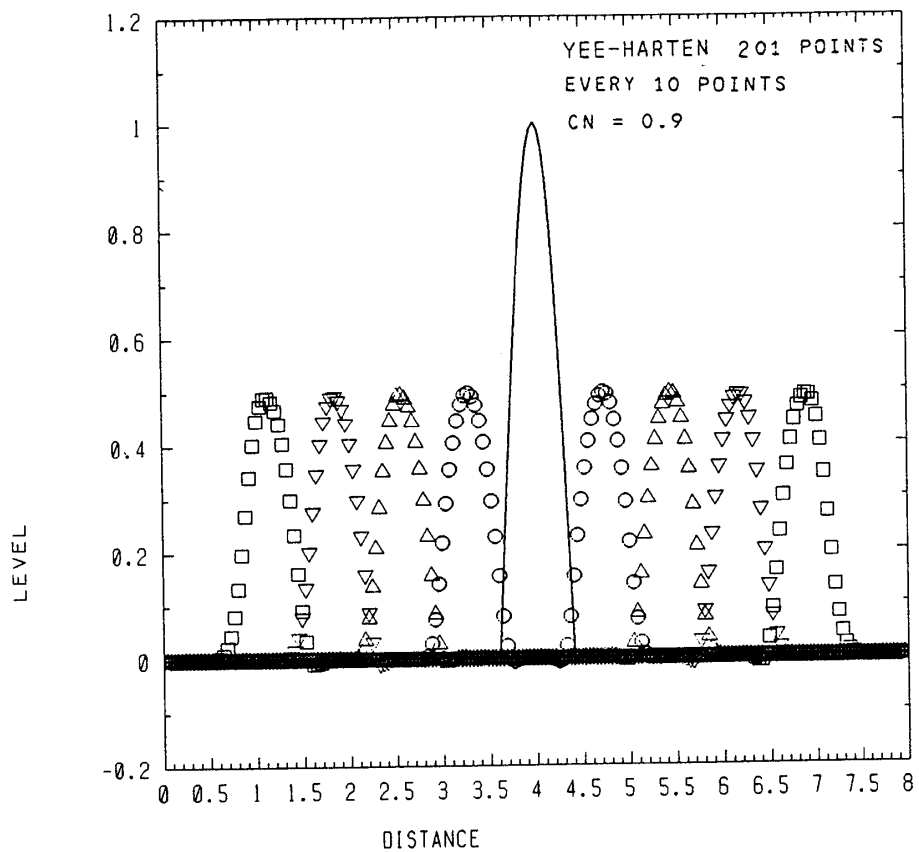
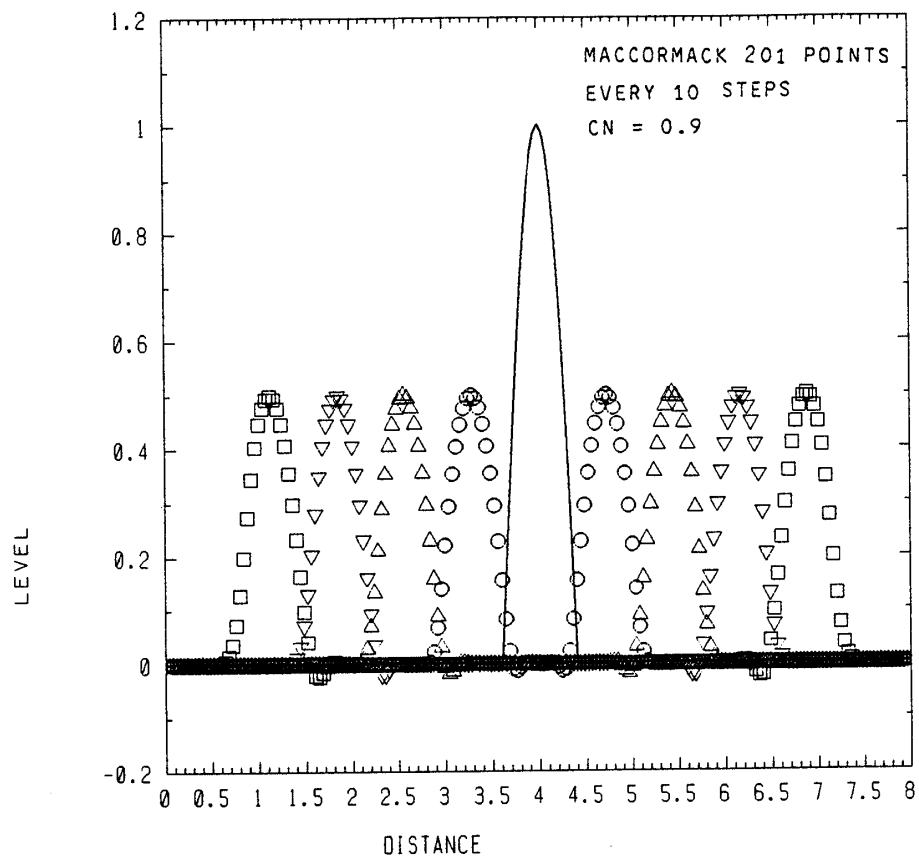
第4図



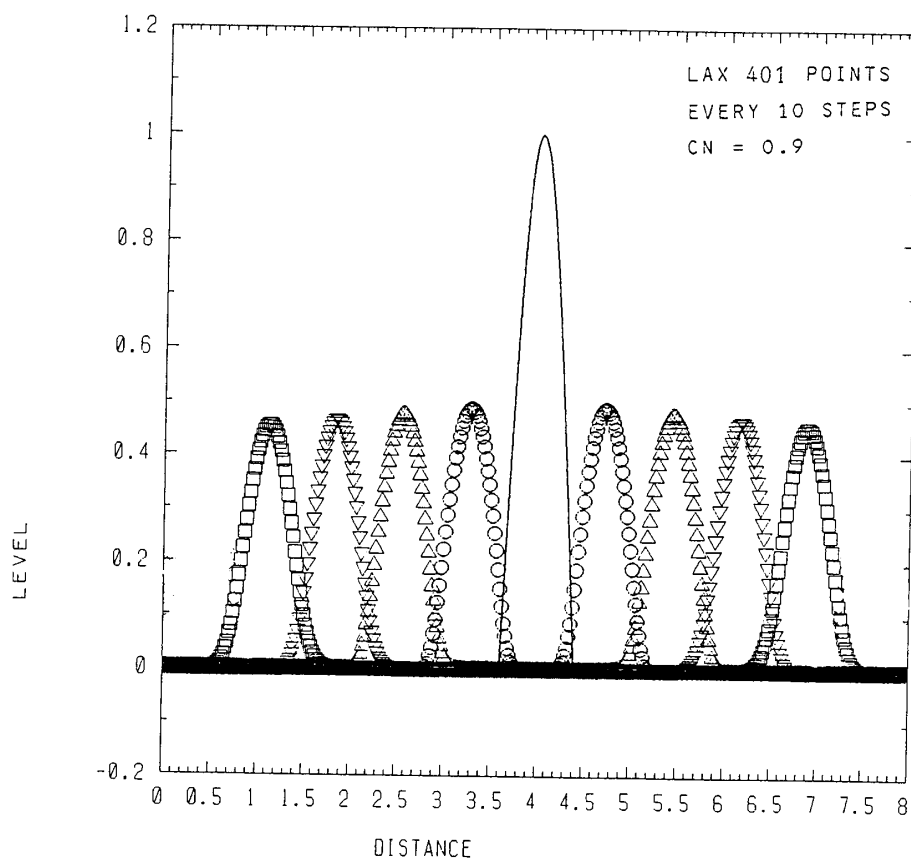
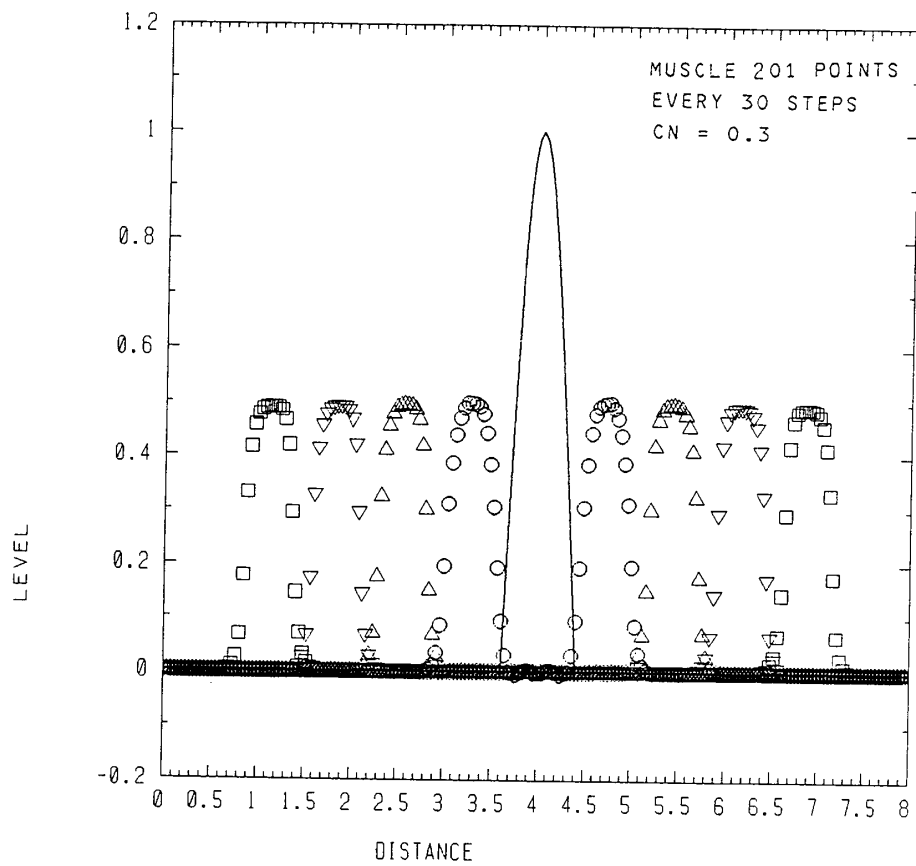
第5図



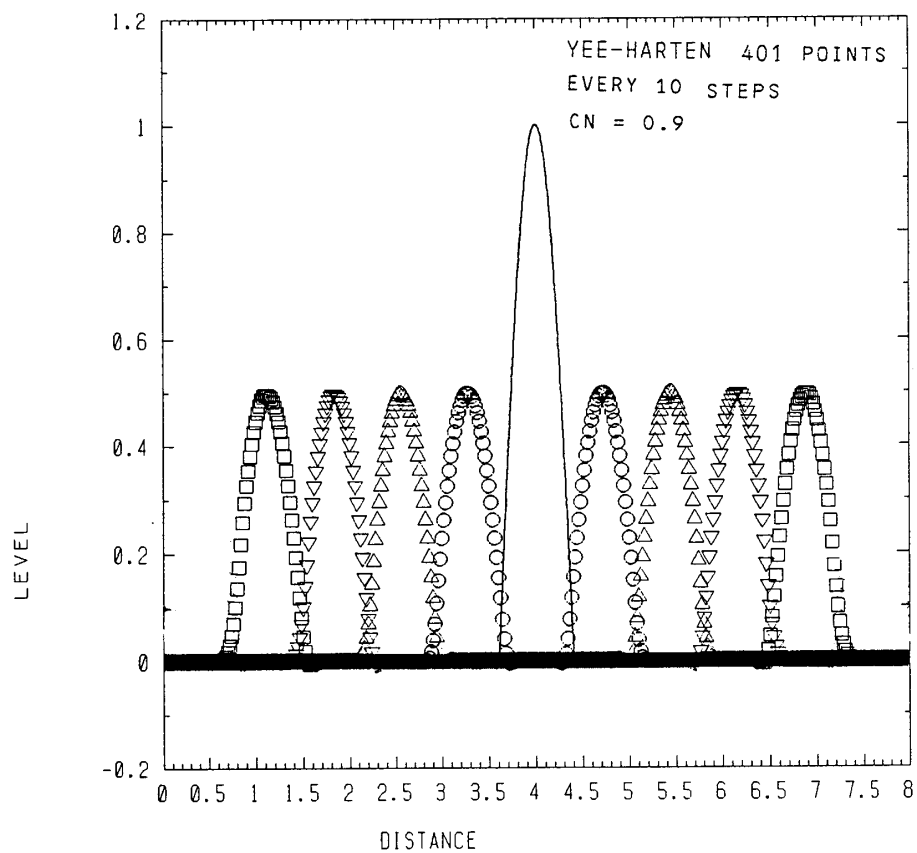
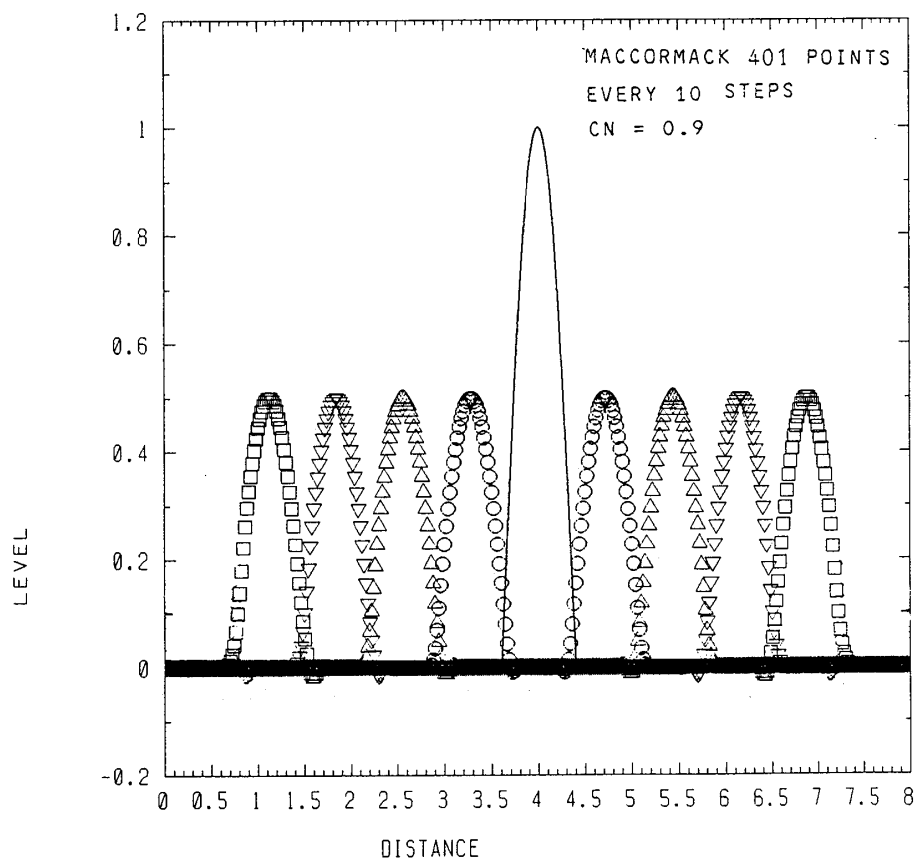
第 6 図



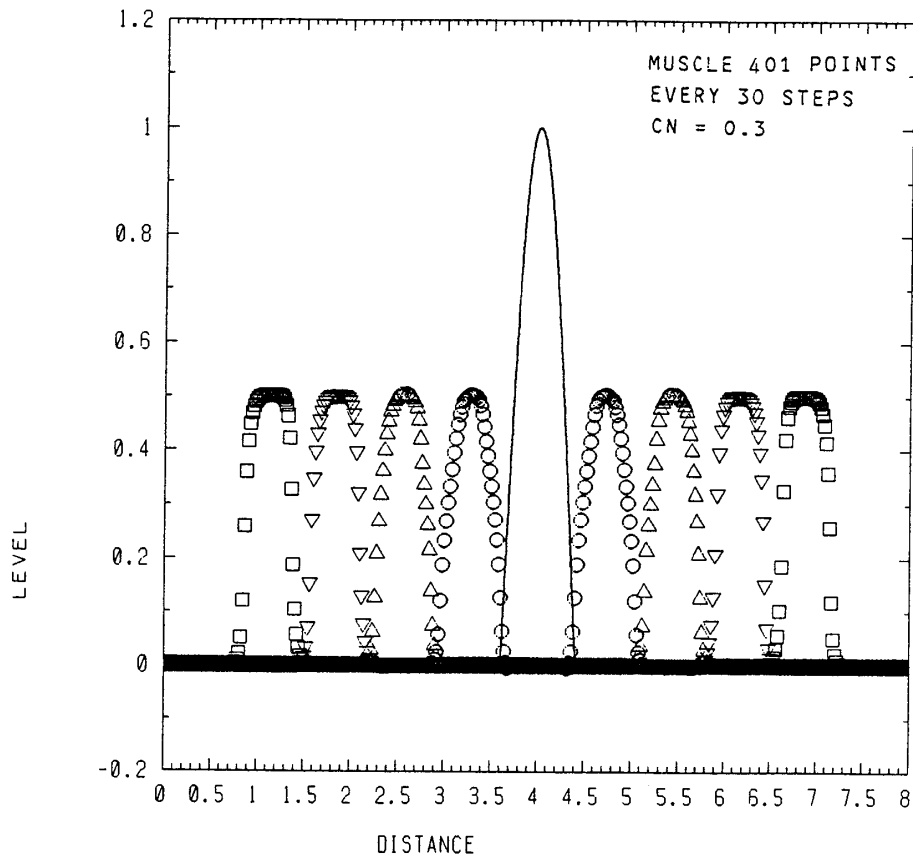
第7図



第 8 図



第9図



第10図

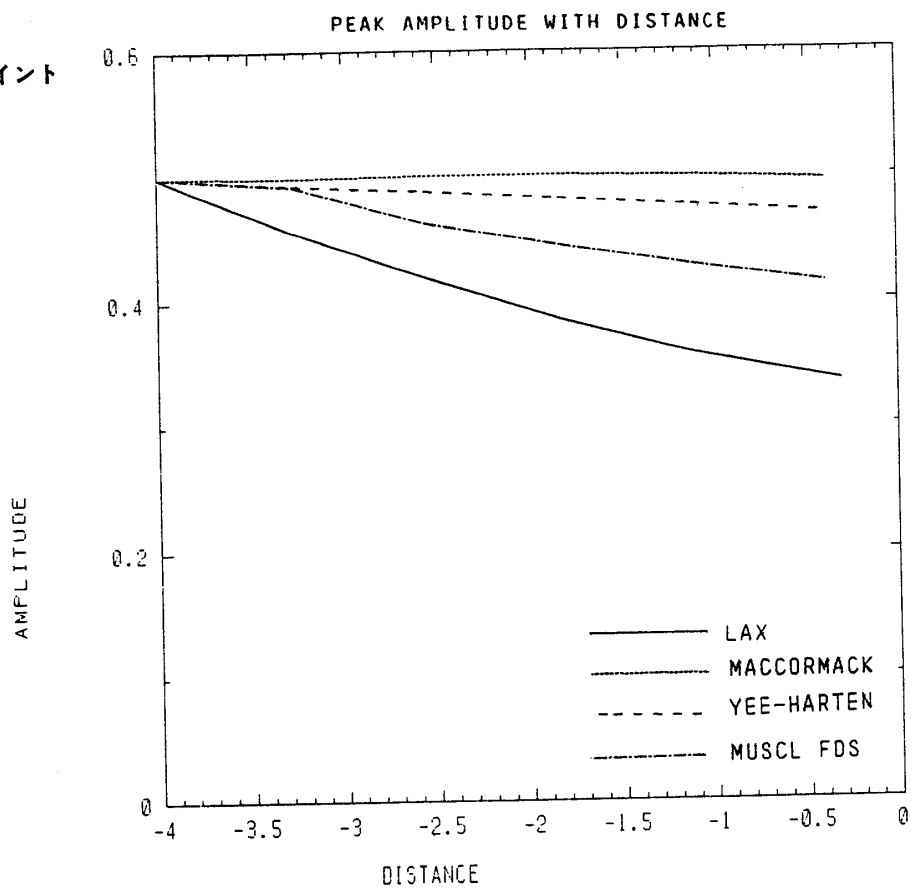
4.2 検討事項

シミュレーションの結果を格子点の数における各手法の有効性を問いながら、時間経過とともに右方向に伝播する波を、次の各点において検討してみる。

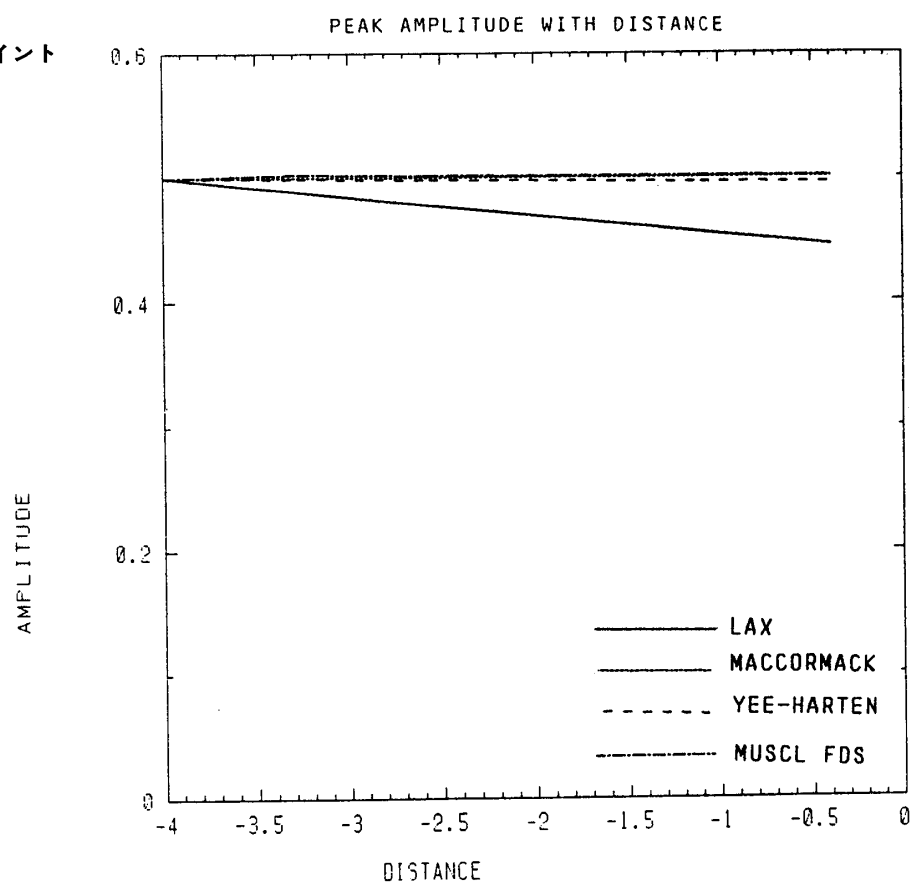
- ・波の強さの減衰（振幅の変化）
- ・波形の崩れ
- ・ ρ' の急激な変化の際に起こる振動

さらに第11図、第12図には、各手法の減衰に着目するために、101ポイント、401ポイントの場合について、振幅の変化のグラフと振動値の表を示した。

101ポイント



401ポイント



第11図

#A101P.DATA -----

	DISTANCE	PEAK	AMPLITUDE
LAX			
	-4.0	0.5	
	-3.2799988	0.45650107	
	-2.5599995	0.41921359	
	-1.8399992	0.38456577	
	-1.1199989	0.35693598	
	-0.31999993	0.33429474	
MACCORMACK			
	-4.0	0.5	
	-3.2799988	0.49947518	
	-2.5599995	0.50060368	
	-1.8399992	0.50080204	
	-1.1199989	0.49913603	
	-0.39999992	0.49585587	
YEE-HARTEN			
	-4.0	0.5	
	-3.2799988	0.49341154	
	-2.5599995	0.48803431	
	-1.8399992	0.48195124	
	-1.1199989	0.47590989	
	-0.39999992	0.46948081	
MUSCL FDS			
	-4.0	0.50	
	-3.2799988	0.49265027	
	-2.5599995	0.46294951	
	-1.8399992	0.44427156	
	-1.1199989	0.42751849	
	-0.39999992	0.41349357	

#A401P.DATA -----

	DISTANCE	PEAK	AMPLITUDE
LAX			
	-4.0	0.5	
	-3.2799997	0.48842984	
	-2.5599995	0.47712868	
	-1.8399992	0.46609795	
	-1.1199999	0.45535243	
	-0.39999998	0.44491136	
MACCORMACK			
	-4.0	0.5	
	-3.2799997	0.49997854	
	-2.5599995	0.49995881	
	-1.8399992	0.49993688	
	-1.1199999	0.49989015	
	-0.39999998	0.49988091	
YEE-HARTEN			
	-4.0	0.5	
	-3.2799997	0.49881357	
	-2.5599995	0.49759334	
	-1.8199997	0.49659228	
	-1.0999994	0.49588448	
	-0.37999994	0.49519122	
MUSCL FDS			
	-4.0	0.5	
	-3.2799997	0.50244880	
	-2.5799999	0.50127256	
	-1.8599997	0.50098968	
	-1.1199999	0.50061262	
	-0.39999998	0.50049895	

4.3 結果

101ポイントでは、振動が生じていることを無視して、減衰にのみ着目すれば、中心差分の MacCormack が有効である。他の手法では減衰、波形の広がりが大きく、格子点不足による数値解の劣化が認められる。ただし、Yee-Harten などの風上差分でも、クーラン数をさらに 1 に近づければ減衰を押えることができると考えられる。格子点を 2 倍にした 201 ポイントでは、LAX 以外は減衰は少なくなっているが、MacCormack と Yee-Harten では波の後ろに振動を生じており、進行方向後ろ側の曲線が立ってきている。401 ポイントになってようやく、MacCormack の振動は少し押えられ、減衰、波形も、各手法とも安定してくる。MUSCL においては、空間の誤差の精度が一番高いので期待していたが、 ρ' の傾きの符号が変わるまでに伝播速度が遅くなり、変わった後で速くなっているため、正弦波の頂点の回りのポイントの波形の崩れが他の手法にくらべて著しい。今回の問題設定と数値計算の条件では、減衰、波形の崩れ、振動を考慮し総合的に判断すると、物理量（ここでは ρ' , u' ）の急激な変化の際に生じる振動を抑えるように工夫された Yee-Harten が、解析的に一番有効であると思われる。また同時に格子点数は 401 ポイント、即ち 1 つの波の中に 40 ポイント程度を取ることが望ましい。

以上が 4 つの手法を使って、200Hz 程度の正弦波を 1 次元で解析してきたシミュレーションの結果である。

4.4 問題点と今後の展望

差分法の重要な点は近似解法である以上、いかにして少ない格子点の数で、高い精度を得るかということである。また、同じ手法にしても、格子点の数を無限に増して行けば必ず解くべき方程式の解析的な解に漸近していくのが差分方程式の備えていなければならない基本的な性質である。

数年前までの差分法においては、解くべきもとの方程式をテイラー展開して、近似したときに生じる誤差（トランケーションエラー）の次数のみが注目され、その次数を高くすることで同じ格子点数でよりよい結果を得るべく努力されてきた。しかし、物理現象の上に、微分方程式が存在するとすれば、解くべき方程式を近似する際に、物理的に矛盾のない状況が考慮されていることが大切である。即ち、誤差の次数を高めることだけでなく、解くべき方程式の物理的性質をうまく表現できることも、計算手法にとって同じ位重要であることが最近指摘されてきている。音場の解析について言えば、伝播の方向、情報の大きさを意識した、風上差分法を利用するのが適切であると考えられ、風上差分法の中でも特に誤差の次数を上げた、高次精度風上差分法である Yee-Harten 及び MUSCL が良い結果を生むだろうと予測した。Yee-Harten においては期待どおりの結果となったが、MUSCL に関しては、前に述べたように波形の崩れが起きた。また、格子点数が少ない場合には少なからず減衰が生じてしまうことも明らかになった。今回の計算では LAX, MacCormack, Yee-Harten とともにクーラン数を 0.9 にしたが、MUSCL は 0.9 では安定な解は得られず、0.3 にしかすることができなかったのが予

測とちがった理由かも知れない。しかし、この計算結果で、音場の解析に一番有効的と思われる Yee-Harten の手法ですら、1次元の200Hz 程度の波の中に40ポイントもとらなければ、数値解析として精度の良い解が得られないことを考えると、1000Hz の高周波などは現在の計算機的能力で可能な制限された格子点数のもとでは、これらの離散化による計算方法が実用的であるとは結論づけることはできない。

今回の結果をふまえて、

1. MUSCL 法において、クーラン数をもっと 1 に近づけることができるか。
2. さらに改良された最近の高次精度風上差分法の ENO (Essentially Non-oscillatory scheme) と呼ばれる手法が音場の解析に有効であるか。
3. 2次元, 3次元と多次元問題に拡張した、音場の解析において、高次精度風上差分法の結果はどうなるか。

を今後の研究課題にしたい。

(本学講師=自然科学担当)

参 考 文 献

- * 1 ACOVST/BOOM 「3次元汎用音場解析プログラム」 株式会社 日本総合研究所
- * 2 Fujii, K.and Obayashi S., "High-Resolution Upwind Scheme for Vortical-Flow Simulations," Journal of Aircraft, Vol.26, No.12, December, 1989.
- * 3 Lafon, F.and Osher, S., "High Order Filtering Methods for Approximating Hyperbolic Systems of Conservation Laws," ICASE Report No.90-25, May, 1990.
- * 4 藤井孝蔵「圧縮性流体方程式に対する高次精度上差分法の基礎」日本機械学会講習会資料 平成2年3月。