ベクトルによる平面幾何の研究：古典的な問題の新しい解法

メタデータ	言語: ja
	出版者:
	公開日: 1987-01-01
	キーワード (Ja):
	キーワード (En):
	作成者:
	メールアドレス:
	所属:
URL	https://tokyo-ondai.repo.nii.ac.jp/records/691

ベクトルによる平面幾何の研究

――古典的な問題の新しい解法――

木 村 勇 三

1. 研究のねらい

東京理科大の松尾吉知教授から，参考文献(9)を戴き，数学科教員養成問題について真剣に取組んだ研究のあることを知って，意を強くした次第である。その中の“都道府県教員採用試験問題（数学）の分類”によると，初等幾何（ベクトルで解くものを含む）が，中学校 13/159, 高等学校 7/182 となっている。ここでは教員採用試験に出題された初等幾何の問題を出発点として，ベクトルによる平面幾何の研究について述べてみたい。

筆者が教職指導室に所属していたころ，一般教養の問題を調査したついでに，専門教養（数学）の問題を調査してみた。その中で明らかに初等幾何の問題であるのに，ベクトルを用いて解いてあるものを発見した。今の人達はめんどうな補助線を見つけて解くよりも，ベクトルのようにある程度機械的に解ける方法を好むのかも知れないということに気がついた。

そこで，平素1年生の講義で用いている参考文献(2)に出てくる，古い Euclid 幾何学と，新しい Hilbert の公理主義による幾何学との橋渡しをしている Pascal の定理と Desargues の定理を取り上げた。以下，最近話題になっている問題をいくつか取り上げて，ベクトルによる証明を試みた。ご批判，ご指導を賜れば幸甚である。

[なお，参考文献 (4),(5),(7),(8) にある基本定理の証明は省略してある。]

2. 研究の内容

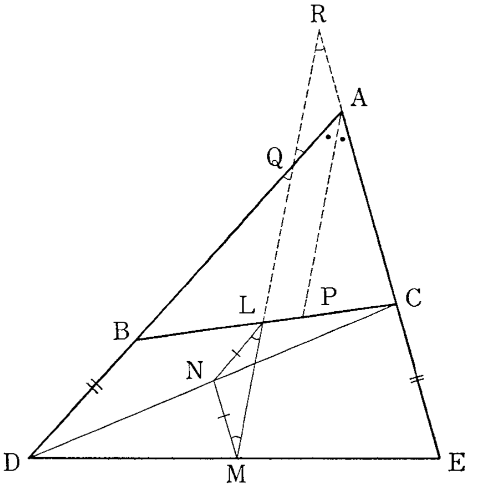
(1) 出発点となった問題

$\triangle$ABC の辺 AB, AC の延長上に，BD＝CE をみたす点 D, E をとる。BC, DE の中点を L, M とすれば，LM は $\angle$A の二等分線に平行である。　　　(59. 新潟県中)

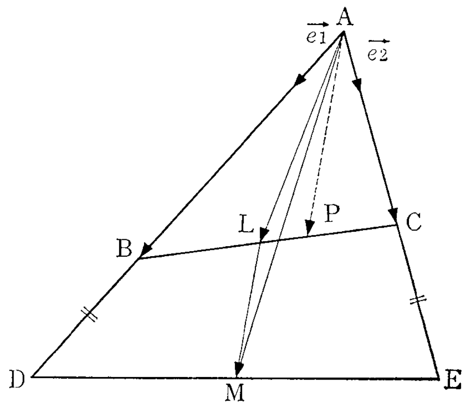
この問題を初等的な方法で解くには，1図のように，線分 CD の中点を N とし，中点連結定理によって

$$\mathrm{LN}\overset{/\!/}{=}\frac{1}{2}\mathrm{BD},\quad \mathrm{NM}\overset{/\!/}{=}\frac{1}{2}\mathrm{CE}$$

となることを用いればよい。



1図



2図

しかし，このような補助線を引くことは，Euclid 幾何学をあまり学習していない人には苦手であると思われる。そこで，ベクトルによる証明を示そう。

〔**証明**〕 2図のように，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ 上の単位ベクトルを，それぞれ $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ とし，$\angle \mathrm{A}$ の二等分線が辺 BC と交わる点を P とすれば

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k(\vec{e}_1+\vec{e}_2)\quad (k\text{ は定数}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

と表される。

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=a,\quad |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=b,\quad |\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|=c$$

とすれば，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=a\vec{e}_1, \overrightarrow{\mathrm{AC}}=b\vec{e}_2$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AL}}=\frac{1}{2}(a\vec{e_1}+b\vec{e_2}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(a+c)\vec{e_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=(b+c)\vec{e_2}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}})=\frac{1}{2}\{(a+c)\vec{e_1}+(b+c)\vec{e_2}\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

②, ③より

$$\overrightarrow{\mathrm{LM}}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{AL}}=\frac{1}{2}(c\vec{e_1}+c\vec{e_2})=\frac{c}{2}(\vec{e_1}+\vec{e_2}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

①, ④より

$$\overrightarrow{\mathrm{LM}}=\frac{c}{2k}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

よって，LM は ∠A の二等分線 AP に平行である。

(2) Pascal の定理と Desargues の定理

参考文献(2)によると，Hilbert (1862～1943) はその著書“幾何学基礎論”で公理主義を確立したが，その成立に至る直接の契機となったのは，1891年 Halle で催された自然科学者大会の席上，Wiener の行った講演であるという。その内容は，“すべての交点定理は，次の二つの特別な交点定理を‘真なるものと仮定’するだけで必然的に証明される”というものであった。

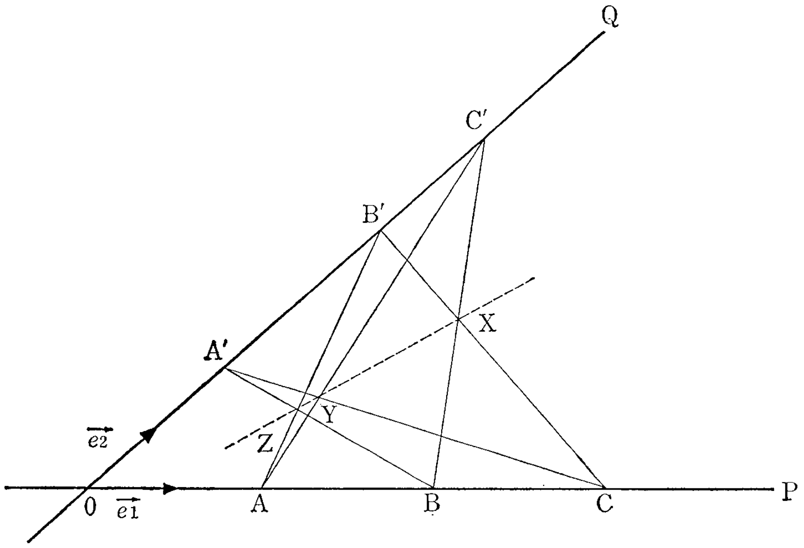
> 二直線の上に交点 O と一致しない三つの点をそれぞれ選び，A, B, C ; A′, B′, C′ とすれば，BC′ と B′C，CA′ と C′A，AB′ と A′B の交点 X, Y, Z は一直線上にある。
>
> **(Pascal の定理)**
>
> △ABC, △A′B′C′ において，三直線 AA′, BB′, CC′ が点 O において交わるならば，BC と B′C′，CA と C′A′，AB と A′B′ の交点 X, Y, Z は一直線上にある。
>
> **(Desargues の定理)**

これらの定理は，普通は Menelaus の定理を用いて証明されるが，直接ベクトルを用いて証明してみよう。

〔Pascal の定理の証明〕

二直線 OP, OQ 上の単位ベクトルを $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ とし，O を原点とする A, B, C ; A′, B′, C′ の位置ベクトルを，それぞれ $a\vec{e_1}, b\vec{e_1}, c\vec{e_1}$; $a'\vec{e_2}, b'\vec{e_2}, c'\vec{e_2}$ とする。また，O を原点とする X, Y, Z の位置ベクトルを $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ とする。

X は BC′ と B′C の交点であるから，m, n を適当にとれば



3図

$$\vec{x}=mb\vec{e_1}+(1-m)c'\vec{e_2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\vec{x}=nc\vec{e_1}+(1-n)b'\vec{e_2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

のように二通りに表せる。

①—②より

$$(mb-nc)\vec{e_1}+\{(1-m)c'-(1-n)b'\}\vec{e_2}=0$$

$\vec{e_1}, \vec{e_2}$ は一次独立であるから

$$mb=nc \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③ \qquad (1-m)c'=(1-n)b' \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

③より，$n=\dfrac{mb}{c}$ となる。これを④に代入すれば

$$(1-m)c'=\left(1-\frac{mb}{c}\right)b'$$

BC′ と B′C は交わるから，$bb'-cc'\fallingdotseq 0$ である。よって

$$m=\frac{c(b'-c')}{bb'-cc'} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

⑤を①に代入すれば

$$\vec{x}=\frac{bc(b'-c')}{bb'-cc'}\vec{e_1}+\frac{b'c'(b-c)}{bb'-cc'}\vec{e_2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

同様に

$$\vec{y}=\frac{ca(c'-a')}{cc'-aa'}\vec{e_1}+\frac{c'a'(c-a)}{cc'-aa'}\vec{e_2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$$

$$\vec{z}=\frac{ab(a'-b')}{aa'-bb'}\vec{e_1}+\frac{a'b'(a-b)}{aa'-bb'}\vec{e_2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$$

⑥, ⑦より

$$\vec{x}-\vec{y}=\left\{\frac{bc(b'-c')}{bb'-cc'}-\frac{ca(c'-a')}{cc'-aa'}\right\}\vec{e_1}+\left\{\frac{b'c'(b-c)}{bb'-cc'}-\frac{c'a'(c-a)}{cc'-aa'}\right\}\vec{e_2}$$

ここで

$$\begin{aligned}\mathrm{P}=&\{aa'(b-c)+bb'(c-a)+cc'(a-b)\}\vec{e_1}\\&+\{aa'(b'-c')+bb'(c'-a')+cc'(a'-b')\}\vec{e_2}\end{aligned}$$

とおけば

$$\vec{x}-\vec{y}=\frac{cc'\mathrm{P}}{(bb'-cc')(cc'-aa')} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑨$$

同様に

$$\vec{y}-\vec{z}=\frac{aa'\mathrm{P}}{(cc'-aa')(aa'-bb')} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑩$$

となるから，⑨, ⑩より

$$\vec{x}-\vec{y}=\frac{cc'(aa'-bb')}{aa'(bb'-cc')}(\vec{y}-\vec{z})$$

となる。よって，X, Y, Z は同一直線上にある。

[Desargues の定理の証明]

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ 上の単位ベクトルを，それぞれ $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=a\vec{e_1},\ \overrightarrow{\mathrm{OA'}}=a'\vec{e_1}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=b\vec{e_2},\ \overrightarrow{\mathrm{OB'}}=b'\vec{e_2}$$

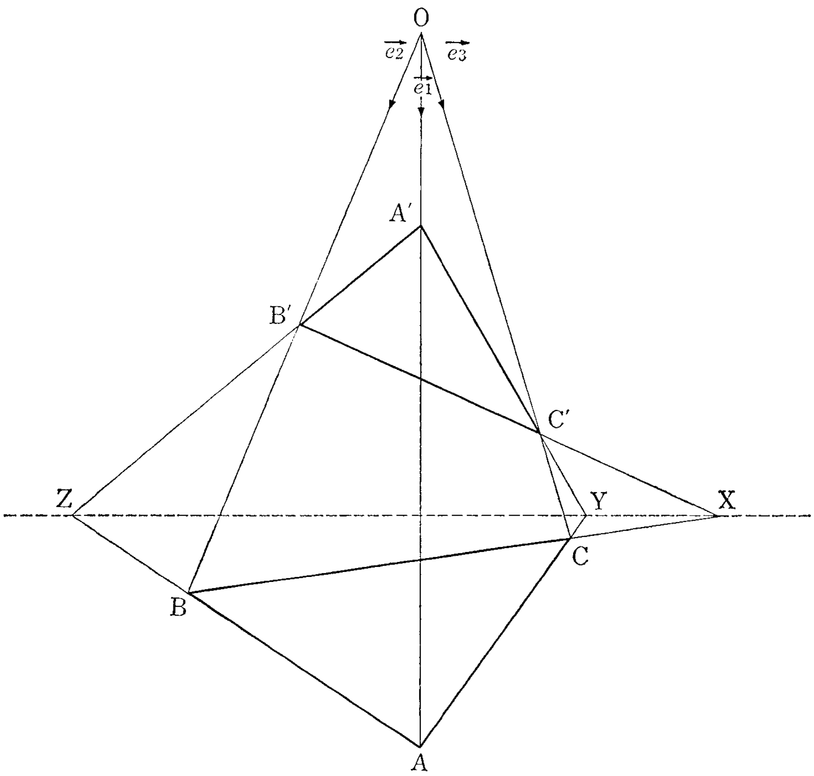
$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=c\vec{e_3},\ \overrightarrow{\mathrm{OC'}}=c'\vec{e_3}$$

とする。また，O を原点とするとき，X, Y, Z の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ とする。

X は BC と B'C' の交点であるから，m, n を適当にとれば

$$\vec{x}=mb\vec{e_2}+(1-m)c\vec{e_3} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\vec{x}=nb'\vec{e_2}+(1-n)c'\vec{e_3} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$



4図

のように二通りに表せる。

①−②より

$$(mb-nb')\vec{e_2}+\{(1-m)c-(1-n)c'\}\vec{e_3}=0$$

$\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ は一次独立であるから

$$mb=nb' \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \qquad (1-m)c=(1-n)c' \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

③より，$n=\dfrac{mb}{b'}$ となる。これを④に代入すれば

$$(1-m)c=\left(1-\frac{mb}{b'}\right)c'$$

BC と B′C′ は交わるから，$bc'-b'c \neq 0$ である。よって

$$m=\frac{b'(c'-c)}{bc'-b'c} \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

⑤を①に代入すれば

$$\vec{x}=\frac{bb'(c'-c)}{bc'-b'c}\vec{e_2}+\frac{cc'(b-b')}{bc'-b'c}\vec{e_3} \cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

同様に

$$\vec{y}=\frac{cc'(a'-a)}{ca'-c'a}\vec{e_3}+\frac{aa'(c-c')}{ca'-c'a}\vec{e_1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑦$$

$$\vec{z}=\frac{aa'(b'-b)}{ab'-a'b}\vec{e_1}+\frac{bb'(a-a')}{ab'-a'b}\vec{e_2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑧$$

⑥, ⑦より

$$\vec{x}-\vec{y}=\frac{aa'(c'-c)}{ca'-c'a}\vec{e_1}+\frac{bb'(c'-c)}{bc'-b'c}\vec{e_2}+\frac{cc'(c'-c)(ab'-a'b)}{(bc'-b'c)(ca'-c'a)}\vec{e_3}$$

ここで

$$\mathrm{P}=aa'(bc'-b'c)\vec{e_1}+bb'(ca'-c'a)\vec{e_2}+cc'(ab'-a'b)\vec{e_3}$$

とおけば

$$\vec{x}-\vec{y}=\frac{(c'-c)\mathrm{P}}{(bc'-b'c)(ca'-c'a)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑨$$

同様に

$$\vec{y}-\vec{z}=\frac{(a'-a)\mathrm{P}}{(ca'-c'a)(ab'-a'b)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑩$$

となるから

$$\vec{x}-\vec{y}=\frac{(c'-c)(ab'-a'b)}{(a'-a)(bc'-b'c)}(\vec{y}-\vec{z})$$

となる。よって，X, Y, Z は同一直線上にある。

(3) 二等辺三角形の性質に関する一つの研究

「二等辺三角形の両底角の二等分線の長さは等しい。」

という定理の逆の証明が最近話題になっている。

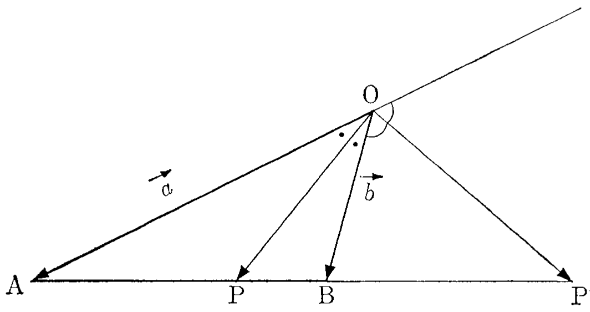
元文教大の井上義夫教授が参考文献(10)で取上げられ，中国の叶余本氏が参考文献(11)でいろいろな証明法を書かれている。また，参考文献(9)で東京理科大の柴田敏男教授が，千葉県の中学校の教員採用試験で所々に枠入れする形でこの問題を提出していて，それが大変見事な解法であることを指摘している。なお，叶余本氏が参考文献(12)で外角の二等分線の場合について書いている。

ここでは，内角の場合と外角の場合に分けて，ベクトルによる解法を示した。なお，旭川北高の村上政夫教諭が参考文献(13)で，内角の場合と外角の場合を統一的にベクトルを用いて解い

ている。

〔基本定理〕 △OAB の ∠O の内角の二等分線が辺 AB と交わる点を P, ∠O の外角の二等分線が辺 AB の延長と交わる点を P′ とする。

O を原点とする A, B の位置ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}$ とし，$|\vec{a}|=a$, $|\vec{b}|=b$ とすれば



5図

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{b\vec{a}+a\vec{b}}{a+b}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\dfrac{-b\vec{a}+a\vec{b}}{a-b}$　$(a\neq b)$

〔注意〕 (2)は，$a>b, a<b$ のいずれの場合でも成立する。

二つの内角の二等分線の長さが等しい三角形は二等辺三角形である。

〔証明〕 △OAB の ∠A, ∠B の二等分線が対辺と交わる点を，それぞれ P, Q とし，AP=BQ とする。また

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{c}$$

$$|\vec{a}|=a,\ |\vec{b}|=b,\ |\vec{c}|=c$$

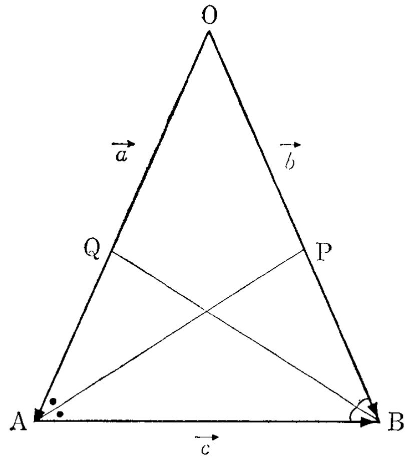
とする。基本定理の(1)により

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{a\vec{c}-c\vec{a}}{c+a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\frac{-c\vec{b}-b\vec{c}}{b+c} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

①より

$$\mathrm{AP}^2=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{2(c^2a^2-cac\vec{c}\cdot\vec{a})}{(c+a)^2}=\frac{2ca(ca-\vec{c}\cdot\vec{a})}{(c+a)^2}$$



6図

②より

$$\mathrm{BQ}^2=\overrightarrow{\mathrm{BQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\frac{2(b^2c^2+bc\vec{b}\cdot\vec{c})}{(b+c)^2}=\frac{2bc(bc+\vec{b}\cdot\vec{c})}{(b+c)^2}$$

$\vec{c}=\vec{b}-\vec{a}$ であるから

$$\mathrm{AP}^2=\frac{2ca(ca+a^2-\vec{a}\cdot\vec{b})}{(c+a)^2},\quad \mathrm{BQ}^2=\frac{2bc(bc+b^2-\vec{a}\cdot\vec{b})}{(b+c)^2}$$

仮定から，$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BQ}^2$ であるから

$$\frac{2ca(ca+a^2-\vec{a}\cdot\vec{b})}{(c+a)^2}=\frac{2bc(bc+b^2-\vec{a}\cdot\vec{b})}{(b+c)^2}$$

$$\therefore\quad a(b+c)^2(ca+a^2-\vec{a}\cdot\vec{b})=b(c+a)^2(bc+b^2-\vec{a}\cdot\vec{b})$$

ここで，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$ であるから

$$a(b+c)^2(a+b+c)(a-b+c)=b(c+a)^2(a+b+c)(-a+b+c)$$

両辺を $a+b+c(\fallingdotseq 0)$ で割れば

$$a(b+c)^2(a-b+c)=b(c+a)^2(-a+b+c)$$

左辺から右辺を引いて変形すれば

$$(a-b)\{c^3+(a+b)c^2+3abc+ab(a+b)\}=0$$

$\{\ \ \}>0$ であるから

$$a=b$$

よって，△OAB は二等辺三角形である。

二つの外角の二等分線の長さが等しい三角形は，もし第三角が三角形の最小，または最大の内角ならば，二等辺三角形である。

〔**証明**〕 △OAB の ∠A, ∠B の外角の二等分線が対辺の延長と交わる点を，それぞれ P′, Q′ とし，AP′=BQ′ とする。また

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{c},\ |\vec{a}|=a,\ |\vec{b}|=b,\ |\vec{c}|=c$$

とする。$a\fallingdotseq c, b\fallingdotseq c$ とすれば，基本定理の(2)により

$$\overrightarrow{\mathrm{AP'}}=\frac{c\vec{a}+a\vec{c}}{a-c}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}\qquad \mathrm{BQ'}=\frac{c\vec{b}-b\vec{c}}{b-c}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

①より

$$\mathrm{AP'}^2=\overrightarrow{\mathrm{AP'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP'}}=\frac{2(c^2a^2+ca\vec{c}\cdot\vec{a})}{(a-c)^2}=\frac{2ca(ca+\vec{c}\cdot\vec{a})}{(a-c)^2}$$

②より

$$\mathrm{BQ'}^2=\overrightarrow{\mathrm{BQ'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ'}}=\frac{2(b^2c^2-bc\vec{b}\cdot\vec{c})}{(b-c)^2}=\frac{2bc(bc-\vec{b}\cdot\vec{c})}{(b-c)^2}$$

$\vec{c}=\vec{b}-\vec{a}$ であるから

$$\mathrm{AP'}^2=\frac{2ca(ca-a^2+\vec{a}\cdot\vec{b})}{(a-c)^2},\quad \mathrm{BQ'}^2=\frac{2bc(bc-b^2+\vec{a}\cdot\vec{b})}{(b-c)^2}$$

仮定から，$\mathrm{AP'}^2=\mathrm{BQ'}^2$ であるから

$$\frac{2ca(ca-a^2+\vec{a}\cdot\vec{b})}{(a-c)^2}=\frac{2bc(ba-b^2+\vec{a}\cdot\vec{b})}{(b-c)^2}$$

$$\therefore\quad a(b-c)^2(ca-a^2+\vec{a}\cdot\vec{b})=b(a-c)^2(bc-b^2+\vec{a}\cdot\vec{b})$$

ここで，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$ であるから

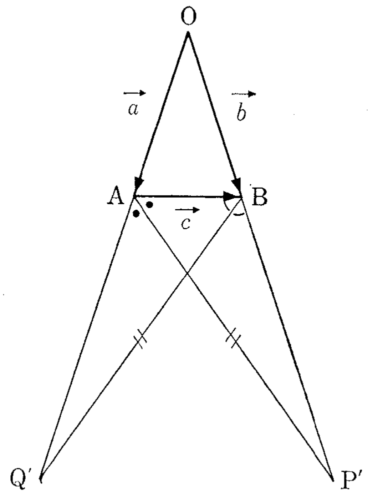
$$a(b-c)^2(a+b-c)(-a+b+c)=b(a-c)^2(a+b-c)(a-b+c)$$

両辺を $a+b-c(>0)$ で割れば

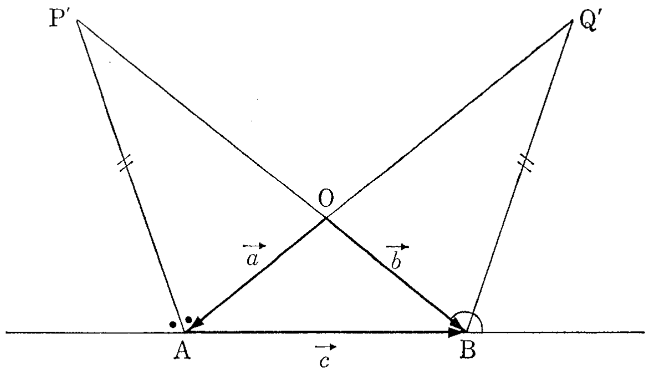
$$a(b-c)^2(-a+b+c)=b(a-c)^2(a-b+c)$$

左辺から右辺を引いて変形すれば

$$(a-b)\{c^3-(a+b)c^2+3abc-ab(a+b)\}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$



7図



8図

(1)　$a>c,\ b>c$ のとき（7図）

③の両辺に -1 をかけて変形すると

$$(a-b)\{c^2(b-c)+a(b-c)^2+ab(a-c)\}=0$$

$\{\quad\}>0$ となるから

$$a=b$$

よって，$\triangle$OAB は二等辺三角形である。

(2)　$c>a, c>b$ のとき（8図）

③を変形すると

$$(a-b)[c(c-b)(c-a)+ab\{(c-b)+(c-a)\}]=0$$

[　]>0 となるから

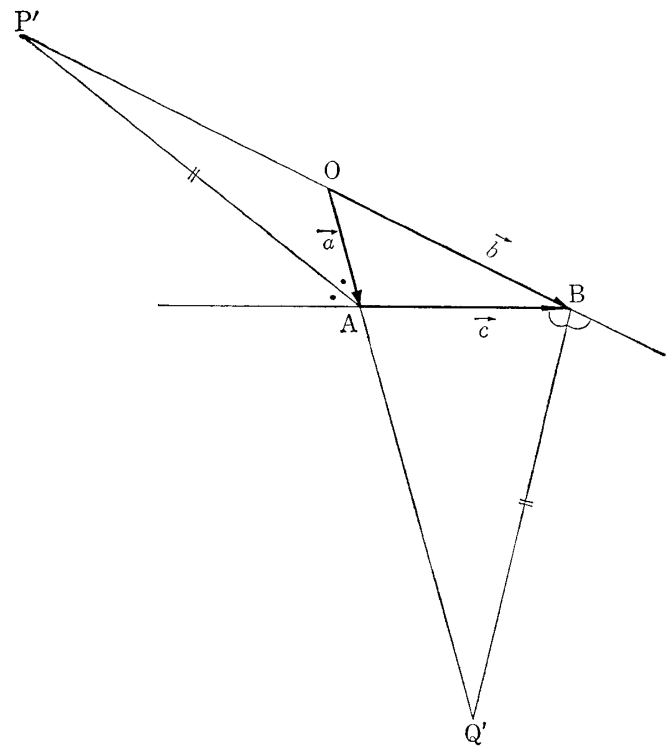
$$a=b$$

よって，△OAB は二等辺三角形である。

〔注意〕 c が a, b の中間にあるときについて考えてみよう。例えば $a<b$ とすると，③は

$$c^3-(a+b)c^2+3abc-ab(a+b)=0$$

となる。ここで



9図

$$f(x)=x^3-(a+b)x^2+3abx-ab(a+b)$$

とおくと，$f(x)$ は x のすべての実数値に対し連続である。そして

$$f(a)=a^3-(a+b)a^2+3a^2b-ab(a+b)=ab(a-b)<0$$

$$f(b)=b^3-(a+b)b^2+3ab^2-ab(a+b)=-ab(a-b)>0$$

であるから，中間値の定理により，$f(c_0)=0 \quad (a<c_0<b)$ なる c_0 が存在する。

そこで，a, c_0, b を三辺とする三角形が存在するための必要十分条件

$$b-a<c_0<a+b$$

が成立するかどうかを調べてみよう。まず，次のことを調べておく。

$$f(b-a)=(b-a)^3-(a+b)(b-a)^2+3ab(b-a)-ab(a+b)$$
$$=-2a^3<0$$

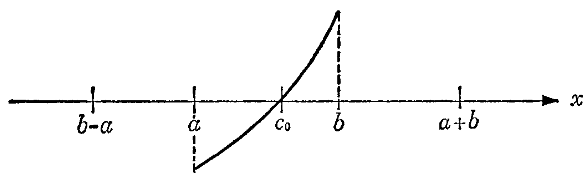
(1)　$b-a \leqq a$ すなわち $b \leqq 2a$ のとき

$f(a)<0, f(b)>0$ より

$$f(c_0)=0 \quad (a<c_0<b)$$

となる c_0 が存在する。そして10図のように

$$b-a<c_0<a+b$$



10図

となるから，a, c_0, b を三辺とする三角形を作ることができる。

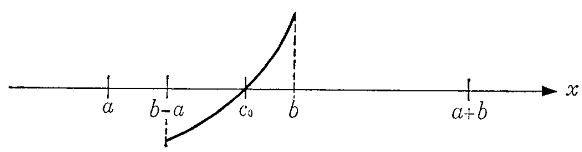
(2)　$b-a>a$ すなわち $b>2a$ のとき

$f(b-a)<0, f(b)>0$ より

$$f(c_0)=0 \quad (b-a<c_0<b)$$

となる c_0 が存在する。そして11図のように

$$b-a<c_0<a+b$$



11図

であるから，a, c_0, b を三辺とする三角形を作ることができる。また，このとき確かに

$$a<c_0<b$$

である。

なお，$y=f(x)$ の増減を調べることにより，(1), (2)の c_0 はただ一つしかないことを証明することができる。（証明略）

以上により，次のことがわかる。

二つの外角の二等分線の長さが等しいとき，第三角が他の二角の中間にある場合，つまり二等辺三角形にならない場合がある。

〔この項については，特に文教大の茂木勇教授のご指導を戴いた。〕

(4) 九点円と Feuerbach の定理

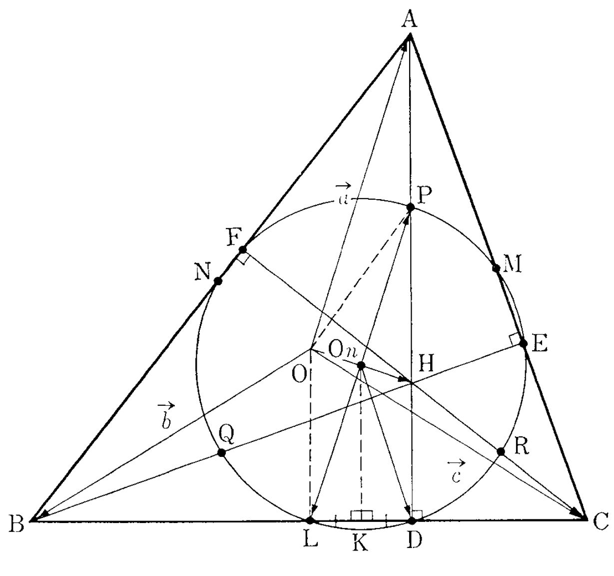
九点円の指導については参考文献(14)にくわしく述べられている。ところでベクトルを用いて九点円の定理の証明を試みたが，意外と簡単に片付いてしまったのには驚いてしまった。そこで Feuerbach の定理をベクトルで解くことを試みたが，こちらは仲々複雑な解法になってしまった。もっとうまい証明法があるかも知れないが，一応得られた結果を記してみよう。

〔基本定理〕 △ABC の外心を O，垂心を H とする。O を原点とする点 A, B, C の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ とすれば

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

△ABC の各辺の中点 L, M, N，三つの垂線の足 D, E, F，垂心と各頂点を結ぶ線分の中点 P, Q, R の九つの点は同一円周上にある。(この円を**九点円**という。)

〔証明〕 △ABC の外心を O，垂心を H, OH の中点を O_n とする。O を原点とする点 A, B, C の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ とすれば



12図

$$\mathrm{H}\ \text{の位置ベクトルは}\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\quad \mathrm{O}_n\ \text{の位置ベクトルは}\ \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

△ABC の外接円の半径を R とすれば

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=R$$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{O}_n\mathrm{L}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OL}}-\overrightarrow{\mathrm{OO}_n}|=\left|\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}\right|=\frac{|\vec{a}|}{2}=\frac{R}{2}$$

同様に $|\overrightarrow{\mathrm{O}_n\mathrm{M}}|=|\overrightarrow{\mathrm{O}_n\mathrm{N}}|=\dfrac{R}{2}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OH}}}{2}=\dfrac{\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})}{2}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{O}_n\mathrm{P}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OO}_n}|=\left|\frac{2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}\right|=\frac{|\vec{a}|}{2}=\frac{R}{2}$$

同様に $|\overrightarrow{\mathrm{O}_n\mathrm{Q}}|=|\overrightarrow{\mathrm{O}_n\mathrm{R}}|=\dfrac{R}{2}$

(3) O_n は線分 OH の中点であるから，O_n から BC に引いた垂線の足 K は，線分 LD の中点である。

$$\therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{O}_n\mathrm{D}}|=|\overrightarrow{\mathrm{O}_n\mathrm{L}}|=\frac{R}{2}$$

同様に $|\overrightarrow{\mathrm{O}_n\mathrm{E}}|=|\overrightarrow{\mathrm{O}_n\mathrm{F}}|=\dfrac{R}{2}$

(1), (2), (3)から九つの点 D, E, F, L, M, N, P, Q, R は，O_n を中心として，半径 $\dfrac{R}{2}$ の円周上にある。

〔基本定理〕 △ABC の外心を O，内心を I，∠A 内の傍心を $\mathrm{I_A}$ とする。O を原点とする A, B, C の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ とし，BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$ とすれば

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\dfrac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{OI_A}}=\dfrac{-a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{-a+b+c}$

三角形の九点円は，内接円に内接し，すべての傍接円に外接する。

(Feuerbach の定理)

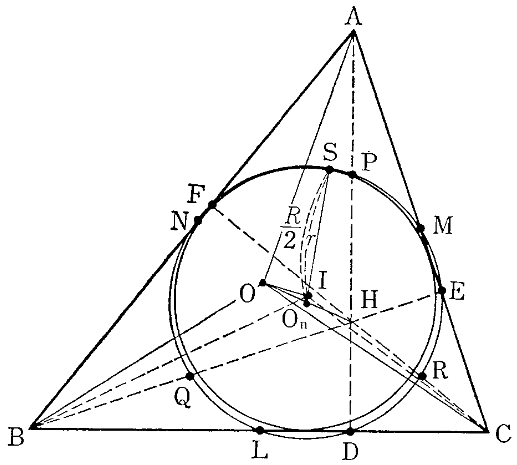
〔九点円が内接円に内接することの証明〕

△ABC の九点円の中心を O_n，外心を O，内心を I，外接円の半径を R，内接円の半径を r とするとき

$$O_nI=\frac{R}{2}-r$$

となることを証明する。

O を原点とする点 A, B, C の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ とする。また，BC$=a$, CA$=b$, AB$=c$ とすると，基本定理の(1)により



13図

$$|\overrightarrow{O_nI}|=|\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OO_n}|=\left|\frac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}\right|$$

$a+b+c=2s$ とおくと

$$|\overrightarrow{O_nI}|^2=\left|\frac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{2s}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}\right|^2=\left|\frac{(s-a)\vec{a}+(s-b)\vec{b}+(s-c)\vec{c}}{2s}\right|^2$$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=R$ であるから

$$|\overrightarrow{O_nI}|^2=\frac{1}{4s^2}\{(s-a)^2R^2+(s-b)^2R^2+(s-c)^2R^2$$

$$+2(s-b)(s-c)\vec{b}\cdot\vec{c}+2(s-c)(s-a)\vec{c}\cdot\vec{a}+2(s-a)(s-b)\vec{a}\cdot\vec{b}\}$$

$$=\frac{R^2}{4s^2}\{(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2$$

$$+2(s-a)(s-c)\cos 2\mathrm{A}+2(s-c)(s-a)\cos 2\mathrm{B}+2(s-a)(s-b)\cos 2\mathrm{C}\}$$

$$=\frac{R^2}{4s^2}\{(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2+2(s-b)(s-c)+2(s-c)(s-a)+2(s-a)(s-b)$$

$$-4(s-b)(s-c)\sin^2\mathrm{A}-4(s-c)(s-a)\sin^2\mathrm{B}-4(s-a)(s-b)\sin^2\mathrm{C}\}$$

正弦定理から，$\sin \mathrm{A}=\dfrac{a}{2R}$，$\sin \mathrm{B}=\dfrac{b}{2R}$，$\sin \mathrm{C}=\dfrac{c}{2R}$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{O}_n\mathrm{I}}|^2=\frac{R^2}{4s^2}\Big[\{(s-a)+(s-b)+(s-c)\}^2$$

$$-4(s-b)(s-c)\frac{a^2}{4R^2}-4(s-c)(s-a)\frac{b^2}{4R^2}-4(s-a)(s-b)\frac{c^2}{4R^2}\Big]$$

$$=\frac{R^2}{4s^2}\Big\{s^2-(a-b+c)(a+b-c)\frac{a^2}{4R^2}-(a+b-c)(-a+b+c)\frac{b^2}{4R^2}$$

$$-(-a+b+c)(a-b+c)\frac{c^2}{4R^2}\Big\}$$

$$=\frac{1}{16s^2}[4R^2s^2-\{a^2-(b-c)^2\}a^2-\{b^2-(a-c)^2\}b^2-\{c^2-(a-b)^2\}c^2]$$

$$=\frac{1}{16s^2}[4R^2s^2-\{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2+2abc(a+b+c)\}]$$

$$=\frac{1}{16s^2}\{4R^2s^2+(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)-2abc(a+b+c)\}$$

$$=\frac{1}{16s^2}\{4R^2s^2+16s(s-a)(s-b)(s-c)-4abcs\}$$

$\triangle$ABC の面積を S とすれば，Heron の公式から

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{O}_n\mathrm{I}}|^2=\frac{1}{16s^2}(4R^2s^2+16S^2-4abcs)=\frac{R^2}{4}+\frac{S^2}{s^2}-\frac{abc}{4s}$$

ここで，$r=\dfrac{S}{s}=\dfrac{abc}{4Rs}$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{O}_n\mathrm{I}}|^2=\frac{R^2}{4}-Rr+r^2=\left(\frac{R}{2}-r\right)^2$$

$$\therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{O}_n\mathrm{I}}|=\left|\frac{R}{2}-r\right| \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

ここで

$$|\overrightarrow{\mathrm{OI}}|^2=\left|\frac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{2s}\right|^2=\frac{1}{4s^2}(a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c})\cdot(a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c})$$

$$=\frac{1}{4s^2}(a^2R^2+b^2R^2+c^2R^2+2bc\vec{b}\cdot\vec{c}+2ca\vec{c}\cdot\vec{a}+2ab\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$=\frac{R^2}{4s^2}(a^2+b^2+c^2+2bc\cos 2\mathrm{A}+2ca\cos 2\mathrm{B}+2ab\cos 2\mathrm{C})$$

$$=\frac{R^2}{4s^2}(a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab-4bc\sin^2\mathrm{A}-4ca\sin^2\mathrm{B}-4ab\sin^2\mathrm{C})$$

$$=\frac{R^2}{4s^2}\left\{(a+b+c)^2-4bc\cdot\frac{a^2}{4R^2}-4ca\cdot\frac{b^2}{4R^2}-4ab\cdot\frac{c^2}{4R^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{4s^2}\{R^2\cdot 4s^2-abc(a+b+c)\}=\frac{1}{4s^2}(R^2\cdot 4s^2-2abcs)$$

$$=R^2-\frac{abc}{2s}=R^2-2Rr=R(R-2r)\geqq 0$$

$$\therefore\quad R\geqq 2r \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

よって，①,②より

$$\mathrm{O}_n\mathrm{I}=\frac{R}{2}-r$$

したがって，九点円と内接円の中心間の距離は，それらの半径の差に等しいから，九点円は内接円に内接する。

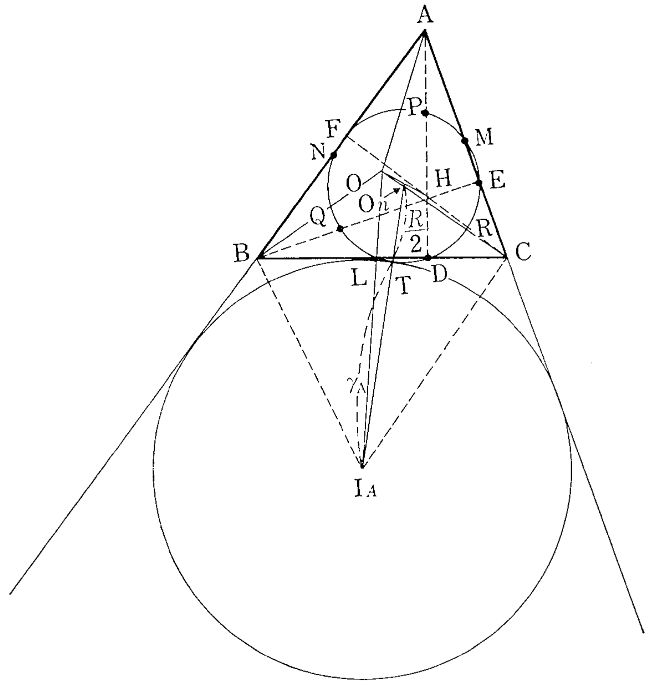
〔九点円が傍接円に外接することの証明〕

∠A 内の傍心を $\mathrm{I_A}$，∠A 内の傍接円の半径を r_{A} とするとき

$$\mathrm{O}_n\mathrm{I_A}=\frac{R}{2}+r_{\mathrm{A}}$$

となることを証明する。

基本定理の(2)により



14図

$$|\overrightarrow{\mathrm{O}_n\mathrm{I}_\mathrm{A}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OI}_\mathrm{A}}-\overrightarrow{\mathrm{OO}_n}|^2$$

$$=\left|\frac{-a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{-a+b+c}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}\right|^2=\left|\frac{-a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{2(s-a)}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}\right|^2$$

$$=\left|\frac{(-a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c})-(s-a)(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})}{2(s-a)}\right|^2=\left|\frac{-s\vec{a}+(s-c)\vec{b}+(s-b)\vec{c}}{2(s-a)}\right|^2$$

$$=\frac{1}{4(s-a)^2}\{s^2R^2+(s-b)^2R^2+(s-c)^2R^2$$

$$+2(s-b)(s-c)\vec{b}\cdot\vec{c}-2s(s-b)\vec{c}\cdot\vec{a}-2s(s-c)\vec{a}\cdot\vec{b}\}$$

$$=\frac{R^2}{4(s-a)^2}\{s^2+(s-b)^2+(s-c)^2$$

$$+2(s-b)(s-c)\cos 2\mathrm{A}-2s(s-b)\cos 2\mathrm{B}-2s(s-c)\cos 2\mathrm{C}\}$$

$$=\frac{R^2}{4(s-a)^2}\{s^2+(s-b)^2+(s-c)^2+2(s-b)(s-c)-2s(s-b)-2s(s-c)$$

$$-4(s-b)(s-c)\sin^2\mathrm{A}+4s(s-b)\sin^2\mathrm{B}+4s(s-c)\sin^2\mathrm{C}\}$$

$$=\frac{R^2}{4(s-a)^2}[\{(-s)+(s-b)+(s-c)\}^2$$

$$-4(s-b)(s-c)\sin^2\mathrm{A}+4s(s-b)\sin^2\mathrm{B}+4s(s-c)\sin^2\mathrm{C}]$$

$$=\frac{R^2}{4(s-a)^2}\left\{(s-a)^2-4(s-b)(s-c)\frac{a^2}{4R^2}+4s(s-b)\frac{b^2}{4R^2}+4s(s-c)\frac{c^2}{4R^2}\right\}$$

$$=\frac{R^2}{4(s-a)^2}\left\{(s-a)^2-(a-b+c)(a+b-c)\frac{a^2}{4R^2}+(a+b+c)(a-b+c)\frac{b^2}{4R^2}\right.$$

$$\left.+(a+b+c)(a+b-c)\frac{c^2}{4R^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{16(s-a)^2}[4R^2(s-a)^2-\{a^2-(b-c)^2\}a^2+\{(a+c)^2-b^2\}b^2+\{(a+b)^2-c^2\}c^2]$$

$$=\frac{1}{16(s-a)^2}[4R^2(s-a)^2-\{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2-2abc(-a+b+c)\}]$$

$$=\frac{1}{16(s-a)^2}\{4R^2(s-a)^2+(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

$$+2abc(-a+b+c)\}$$

$$=\frac{1}{16(s-a)^2}\{4R^2(s-a)^2+16s(s-a)(s-b)(s-c)+4abc(s-a)\}$$

$$=\frac{1}{16(s-a)^2}\{4R^2(s-a)^2+16S^2+4abc(s-a)\}$$

$$=\frac{R^2}{4}+\frac{abc}{4(s-a)}+\frac{S^2}{(s-a)^2}$$

ここで，$r_\mathrm{A}=\dfrac{S}{s-a}=\dfrac{abc}{4R(s-a)}$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{O}_n\mathrm{I}_\mathrm{A}}|^2=\frac{R^2}{4}+Rr_\mathrm{A}+r_\mathrm{A}{}^2=\left(\frac{R}{2}+r_\mathrm{A}\right)^2$$

$\frac{R}{2}+r_\mathrm{A}>0$ であるから

$$\mathrm{O}_n\mathrm{I}_\mathrm{A}=\frac{R}{2}+r_\mathrm{A}$$

したがって，九点円と ∠A 内の傍接円の中心間の距離は，それらの半径の和に等しいから，九点円は ∠A 内の傍接円に外接する。

同様に，九点円は ∠B, ∠C 内の傍接円に外接する。

(5) Morley の定理

これは大変きれいな定理である。参考文献(15)にあるように，Frank Morley の発見したものである。同氏は心臓形曲線（Cardioid）の焦点の軌跡を求めるときに得た定理であると述べている。この同じ会誌に林鶴一博士が「三角形の角の三等分線について」という論説を掲げられている。次にベクトルによる解法を二つ示したが，前者は参考文献(6)にある解をベクトル的に翻案したものである。後者は計算が大変複雑になってしまったが，ベクトルの内積を利用したものである。

三角形の頂角の三等分線の辺に近い二つずつの交点は正三角形を作る。 (Morlery の定理)

〔矢線ベクトルによる証明〕

△ABC の頂角の三等分線の辺に近い二つずつの交点を，15図のように P, Q, R とし，$\mathrm{AQ}=x, \mathrm{AR}=y$ とする。

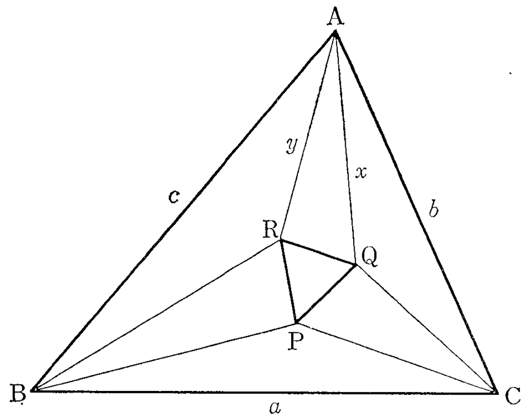
$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}-\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|^2&=(\overrightarrow{\mathrm{AR}}-\overrightarrow{\mathrm{AQ}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AR}}-\overrightarrow{\mathrm{AQ}})\\&=|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2\\&=x^2+y^2-2xy\cos\frac{\mathrm{A}}{3}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots①\end{aligned}$$

$\mathrm{BC}=a,\ \mathrm{CA}=b,\ \mathrm{AB}=c$ とし，△QAC に正弦定理を用いれば

$$\frac{x}{\sin \mathrm{C}/3}=\frac{b}{\sin(\mathrm{A}+\mathrm{C})/3}$$



15図

$$\therefore \quad x=\frac{b\sin \mathrm{C}/3}{\sin(\mathrm{A}+\mathrm{C})/3}=\frac{b\sin \mathrm{C}/3}{\sin(60^\circ-\mathrm{B}/3)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

△ABC の外接円の半径を R とし，正弦定理，三倍角の公式などを用いれば

$$b=2R\sin \mathrm{B}=2\mathrm{R}\sin\frac{\mathrm{B}}{3}\left(3-4\sin^2\frac{\mathrm{B}}{3}\right)$$

$$=2R\sin\frac{\mathrm{B}}{3}\left(2\cos\frac{2}{3}\mathrm{B}+1\right)=4R\sin\frac{\mathrm{B}}{3}\left(\cos\frac{2}{3}\mathrm{B}-\cos 120^\circ\right)$$

$$=8R\sin\frac{\mathrm{B}}{3}\sin\left(60^\circ+\frac{\mathrm{B}}{3}\right)\sin\left(60^\circ-\frac{\mathrm{B}}{3}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

③を②に代入すれば

$$x=8R\sin\left(60^\circ+\frac{\mathrm{B}}{3}\right)\sin\frac{\mathrm{B}}{3}\sin\frac{\mathrm{C}}{3} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

同様に

$$y=8R\sin\left(60^\circ+\frac{\mathrm{C}}{3}\right)\sin\frac{\mathrm{B}}{3}\sin\frac{\mathrm{C}}{3} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

④, ⑤を①に代入すれば

$$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|^2=\left(8\mathrm{R}\sin\frac{\mathrm{B}}{3}\sin\frac{\mathrm{C}}{3}\right)^2$$

$$\times\left\{\sin^2\left(60^\circ+\frac{\mathrm{B}}{3}\right)+\sin^2\left(60^\circ+\frac{\mathrm{C}}{3}\right)-2\sin\left(60^\circ+\frac{\mathrm{B}}{3}\right)\sin\left(60^\circ+\frac{\mathrm{C}}{3}\right)\cos\frac{\mathrm{A}}{3}\right\}$$

{ }を計算すると

$$\frac{1}{2}\left\{1-\cos\left(120^\circ+\frac{2}{3}\mathrm{B}\right)+1-\cos\left(120^\circ+\frac{2}{3}\mathrm{C}\right)\right\}$$

$$+\left\{\cos\left(120^\circ+\frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{3}\right)-\cos\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{3}\right\}\cos\frac{\mathrm{A}}{3}$$

$$=1-\cos\left(120°+\frac{B+C}{3}\right)\cos\frac{B-C}{3}+\left\{\cos\left(120°+\frac{B+C}{3}\right)-\cos\frac{B-C}{3}\right\}\cos\frac{A}{3}$$

$$=1-\cos\left(180°-\frac{A}{3}\right)\cos\frac{B-C}{3}+\left\{\cos\left(180°-\frac{A}{3}\right)-\cos\frac{B-C}{3}\right\}\cos\frac{A}{3}$$

$$=1+\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B-C}{3}-\cos^2\frac{A}{3}-\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B-C}{3}$$

$$=1-\cos^2\frac{A}{3}=\sin^2\frac{A}{3}$$

$$\therefore\quad |\overrightarrow{QR}|^2=\left(8R\sin\frac{A}{3}\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}\right)^2$$

$$\therefore\quad |\overrightarrow{QR}|=8R\sin\frac{A}{3}\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}$$

$|\overrightarrow{PQ}|$, $|\overrightarrow{RP}|$ についても同様であるから

$$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{QR}|=|\overrightarrow{RP}|$$

よって，△PQR は正三角形である。

〔数対ベクトルによる証明〕

A から BC へ引いた垂線の足を O とする。ベクトルを成分で表すこととする。

$$\overrightarrow{OA}=(0,\alpha),\ \overrightarrow{OB}=(\beta,0),\ \overrightarrow{OC}=(\gamma,0)$$

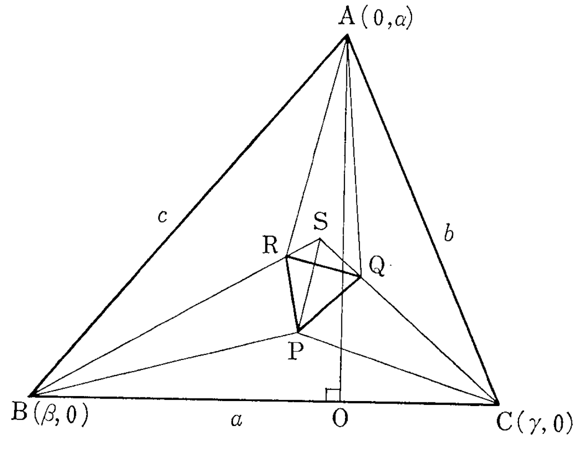
$$\overrightarrow{OP}=(p_1,p_2),\ \overrightarrow{OQ}=(q_1,q_2),\ \overrightarrow{OR}=(r_1,r_2)$$

また，BR と CQ の延長の交点を S とし

$$\overrightarrow{OS}=(s_1,s_2)$$

とする。P は △SBC の内心である。

まず，$\overrightarrow{PS}\perp\overrightarrow{QR}$ となることを証明しよう。



16図

△PBC に正弦定理を用いれば

$$\frac{\mathrm{BP}}{\sin \mathrm{C}/3}=\frac{a}{\sin\{180°-(\mathrm{B}+\mathrm{C})/3\}} \quad \therefore \quad \mathrm{BP}=\frac{a\sin \mathrm{C}/3}{\sin(\mathrm{B}+\mathrm{C})/3}$$

よって

$$p_1=\beta+\frac{a\cos \mathrm{B}/3\sin \mathrm{C}/3}{\sin(\mathrm{B}+\mathrm{C})/3},\quad p_2=\frac{a\sin \mathrm{B}/3\sin \mathrm{C}/3}{\sin(\mathrm{B}+\mathrm{C})/3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

同様に

$$s_1=\beta+\frac{a\cos 2\mathrm{B}/3\sin 2\mathrm{C}/3}{\sin 2(\mathrm{B}+\mathrm{C})/3},\quad s_2=\frac{a\sin 2\mathrm{B}/3\sin 2\mathrm{C}/3}{\sin 2(\mathrm{B}+\mathrm{C})/3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ のなす角は，$-(\mathrm{C}+\mathrm{A}/3)$ であるから

$$\left.\begin{aligned} q_1&=\frac{b\cos(\mathrm{C}+\mathrm{A}/3)\sin \mathrm{C}/3}{\sin(\mathrm{A}+\mathrm{C})/3}\\ q_2&=\alpha-\frac{b\sin(\mathrm{C}+\mathrm{A}/3)\sin \mathrm{C}/3}{\sin(\mathrm{A}+\mathrm{C})/3}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BO}}$ のなす角は，$180°+(\mathrm{B}+\mathrm{A}/3)$ であるから

$$\left.\begin{aligned} r_1&=-\frac{c\cos(\mathrm{B}+\mathrm{A}/3)\sin \mathrm{B}/3}{\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})/3}\\ r_2&=\alpha-\frac{c\sin(\mathrm{B}+\mathrm{A}/3)\sin \mathrm{B}/3}{\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})/3}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

①, ②から，$\dfrac{2a\sin \mathrm{B}/3\sin \mathrm{C}/3}{\sin 2(\mathrm{B}+\mathrm{C})/3}=k$ とおけば

$$\begin{aligned} s_1-p_1&=\frac{a}{\sin 2(\mathrm{B}+\mathrm{C})/3\sin(\mathrm{B}+\mathrm{C})/3}\\ &\quad\times\left\{\cos\frac{2}{3}\mathrm{B}\sin\frac{2\mathrm{C}}{3}\sin\frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{3}-\cos\frac{\mathrm{B}}{3}\sin\frac{\mathrm{C}}{3}\sin\frac{2(\mathrm{B}+\mathrm{C})}{3}\right\}\\ &=\frac{2a\sin \mathrm{C}/3}{\sin 2(\mathrm{B}+\mathrm{C})/3\sin(\mathrm{B}+\mathrm{C})/3}\\ &\quad\times\left(\cos\frac{2}{3}\mathrm{B}\cos\frac{\mathrm{C}}{3}\sin\frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{3}-\cos\frac{\mathrm{B}}{3}\sin\frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{3}\cos\frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{3}\right)\\ &=\frac{2a\sin \mathrm{C}/3}{\sin 2(\mathrm{B}+\mathrm{C})/3}\left(\cos\frac{2}{3}\mathrm{B}\cos\frac{\mathrm{C}}{3}-\cos\frac{\mathrm{B}}{3}\cos\frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{3}\right)\\ &=\frac{2a\sin \mathrm{C}/3}{\sin 2(\mathrm{B}+\mathrm{C})/3}\left(\cos^2\frac{\mathrm{B}}{3}\cos\frac{\mathrm{C}}{3}-\sin^2\frac{\mathrm{B}}{3}\cos\frac{\mathrm{C}}{3}\right.\\ &\quad\left.-\cos^2\frac{\mathrm{B}}{3}\cos\frac{\mathrm{C}}{3}+\cos\frac{\mathrm{B}}{3}\sin\frac{\mathrm{B}}{3}\sin\frac{\mathrm{C}}{3}\right)\end{aligned}$$

$$=-\frac{2a\sin B/3\sin C/3}{\sin 2(B+C)/3}\left(\sin\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3}-\cos\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}\right)$$

$$=-k\sin\frac{B-C}{3} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

同様に計算すれば $\quad s_2-p_2=k\cos\frac{B-C}{3} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$

③, ④から，$\frac{2R}{\sin(A+B)/3\sin(A+C)/3}=l$ とおけば

$$r_1-q_1=-l\left\{\sin C\cos\left(B+\frac{A}{3}\right)\sin\frac{B}{3}\sin\frac{A+C}{3}\right.$$

$$\left.+\sin B\cos\left(C+\frac{A}{3}\right)\sin\frac{C}{3}\sin\frac{A+B}{3}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$$

$$r_2-q_2=-l\left\{\sin C\sin\left(B+\frac{A}{3}\right)\sin\frac{B}{3}\sin\frac{A+C}{3}\right.$$

$$\left.-\sin B\sin\left(C+\frac{A}{3}\right)\sin\frac{C}{3}\sin\frac{A+B}{3}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$$

⑤, ⑥, ⑦, ⑧を用いると

$$\overrightarrow{PS}\cdot\overrightarrow{QR}=(s_1-p_1)(r_1-q_1)+(s_2-p_2)(r_2-q_2)$$

$$=kl\left\{\sin C\cos\left(B+\frac{A}{3}\right)\sin\frac{B}{3}\sin\frac{A+C}{3}\sin\frac{B-C}{3}\right.$$

$$+\sin B\cos\left(C+\frac{A}{3}\right)\sin\frac{C}{3}\sin\frac{A+B}{3}\sin\frac{B-C}{3}$$

$$-\sin C\sin\left(B+\frac{A}{3}\right)\sin\frac{B}{3}\sin\frac{A+C}{3}\cos\frac{B-C}{3}$$

$$\left.+\sin B\sin\left(C+\frac{A}{3}\right)\sin\frac{C}{3}\sin\frac{A+B}{3}\cos\frac{B-C}{3}\right\}$$

{ }内の第1行と第3行，第2行と第4行を加えれば

$$\overrightarrow{PS}\cdot\overrightarrow{QR}=kl\left(-\sin C\sin\frac{B}{3}\sin\frac{A+C}{3}\sin\frac{A+2B+C}{3}\right.$$

$$\left.+\sin B\sin\frac{C}{3}\sin\frac{A+B}{3}\sin\frac{A+B+2C}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}kl\left\{\sin C\sin\frac{B}{3}\left(\cos 120^\circ-\cos\frac{2B}{3}\right)\right.$$

$$\left.-\sin B\sin\frac{C}{3}\left(\cos 120^\circ-\cos\frac{2C}{3}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}kl\left(-\frac{1}{2}\sin C\sin\frac{B}{3}-\sin C\sin\frac{B}{3}\cos\frac{2B}{3}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sin B\sin\frac{C}{3}+\sin B\sin\frac{C}{3}\cos\frac{2C}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}kl\left\{\sin C \sin\frac{B}{3} + \sin C\left(\sin B - \sin\frac{B}{3}\right)\right.$$

$$\left. - \sin B \sin\frac{C}{3} - \sin B\left(\sin C - \sin\frac{C}{3}\right)\right\} = 0$$

すなわち，$\overrightarrow{PS}\cdot\overrightarrow{QR} = 0$ であるから，$\overrightarrow{PS} \perp \overrightarrow{QR}$ となる。

また，P は △SBC の内心であるから，∠BSP＝∠CSP

よって，Q, R は PS に関して対称である。

$$\therefore \quad |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PR}|$$

同様に，$|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{QR}|$ が証明できる。したがって，△PQR は正三角形である。

〔**注意**〕 Morley の定理は次のように外角の三等分線の場合も成り立つ。

三角形の頂角の外角の三等分線の辺に近い二つずつの交点は正三角形を作る。

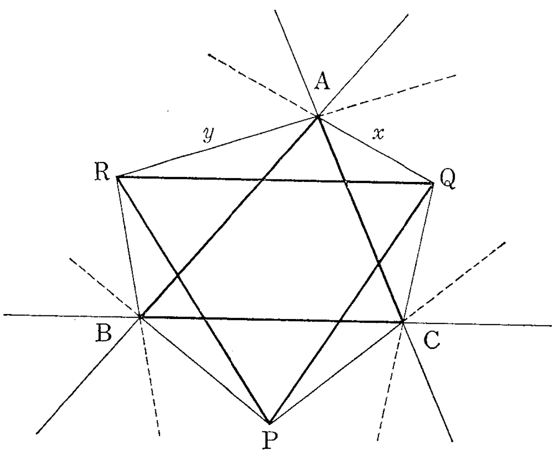
〔**略証**〕17図のように P, Q, R を定め，AQ＝x, AR＝y とすれば

$$|\overrightarrow{QR}|^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\left(120° + \frac{A}{3}\right)$$

$$x = 8R\sin\frac{B}{3}\sin\left(60° - \frac{B}{3}\right)\sin\left(60° - \frac{C}{3}\right)$$

$$y = 8R\sin\frac{C}{3}\sin\left(60° - \frac{B}{3}\right)\sin\left(60° - \frac{C}{3}\right)$$

$$\therefore \quad |\overrightarrow{QR}| = 8R\sin\left(60° - \frac{A}{3}\right)\sin\left(60° - \frac{B}{3}\right)\sin\left(60° - \frac{C}{3}\right)$$



17図

$|\overrightarrow{PQ}|$, $|\overrightarrow{RP}|$ についても同様である。したがって，△PQR は正三角形である。

（矢線ベクトルによる証明を示したが，数対ベクトルでも証明することができる。）

3. 今後の問題点

以上平面幾何の代表的な問題をベクトルを用いて解いてみた。複雑な計算を要するものもあり，問題解決の手段として，必ずしもすぐれているとはいえないが，統一的な見地から解ける場合もあるし，また意外な発見もある。研究する価値は十分あると思われる。

1950年代から1960年代にかけて，数学教育の現代化が華やかな頃，フランスの Jean Dieudonné が，“Euclid must go!” と唱えて以来，わが国のみならず，世界的にも，中等教育から Euclid 幾何学の影が薄れたような気がする。Dieudonné 編の数学史によると，Euclid 幾何学は解法が個々ばらばらであり，解析幾何学は座標軸のとり方によって影響を受ける。しかし，ベクトルはその点統一があり自由なところに特徴があると記されている。

しかしながら， Euclid 幾何学にも捨てがたいところがある。 ベクトルは複雑な計算を必要とすることが多いが，Euclid 幾何学は小まわりがきいて，軽妙なところがある。とくに，少ない基礎知識で創意工夫や発見の喜びを味わせてくれる。最近教育課程審議会の会長を勤めておられるノーベル賞受賞者の福井謙一博士が，中学校や高等学校の数学教育でぜひ幾何を重視してほしいと要望されている。新しい幾何教育の望ましいあり方を研究するのが，われわれに課せられた緊急の課題であると思う。

〔本稿は，昭和62年8月上旬福岡県で行われた日本数学教育学会第69回全国大会の高専大学部会で発表したものに修正，補足を加えたものである。〕　（本学教授＝数学担当）

参 考 文 献

(1) 中村幸四郎他：ユークリッド原論（共立出版）

(2) 吉田洋一・赤攝也：数学序説（培風館）

(3) 稲垣信夫・佐伯卓也：基礎課程幾何学（森北出版）

(4) 平川淳康：新初等幾何学（内田老鶴圃）

(5) 平川淳康：平面上のベクトル幾何学（内田老鶴圃）

(6) 岩田至康：幾何学大辞典第一巻（槇書店）

(7) 木村勇三他：数学Ⅰ問題700選（培風館）

(8) 木村勇三他：数学Ⅱ問題700選（培風館）

(9) 松尾吉知他：数学科教員の数学についての専門教養の内容に関する研究（1983科学研究費一般研究C）

(10) 井上義夫：二等辺三角形の性質の一つの研究（日数教会誌1980第62巻第5号）

(11) 叶余木：二等辺三角形の性質の一つの研究（日数教会誌1983第65巻第11号）

(12) 叶余木：続《二等辺三角形の性質の一つの研究》（日数教会誌1984第66巻第11号）

(13) 村上政夫：二等辺三角形の性質――小論

(14) 吉田稔：九点円の指導をめぐって（日数教会誌1986第68巻第7号）

(15) Frank Morley : On the Intersection of the Trisectors of the angles of a Triangle.（日本中等教育数学会誌1924第6巻第6号）