東京音楽大学リポジトリ
Tokyo College of Music Repository

数値流体力学を用いた音場解析

メタデータ	言語: ja 出版者: 公開日: 1993-12-20 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 村中, 洋子 メールアドレス: 所属:
URL	https://tokyo-ondai.repo.nii.ac.jp/records/738

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 International License.

数値流体力学を用いた音場解析

村　中　洋　子

abstract

最近の数値流体力学（CFD：Computational Fluid Dynamics）は，コンピュータの発展と数値計算手法の進歩により，様々な工学分野に応用されるようになった。ここでは，数値流体力学が，音響工学のひとつであるホール等の音響効果の把握にどの程度有効であるかを調べるために，まず正弦波（純音）の伝播を例にとり種々の手法を使って音場解析を試みる。

1.　はじめに

我々の周囲には，いろいろな音が満ち満ちている。テレビの音，人の声，電車の音，楽器の音，鳥の声，様々である。人間社会の音の活用法には，言語，音楽などがあげられる。言語は今の文明社会を築くのに不可欠であったし，音楽もまた，人間の感情や精神的な面に大きな影響をおよぼしてきた。

ところが，近年人類が扱うエネルギーの増大化にともなって，必然的に発生する不要な音(騒音）のエネルギーも大きくなり公害問題にまで発展してきている。コンピュータの発達によって，こういった音響工学的問題に対しても，数値シミュレーションが利用されるようになってきた。その主な理由は，実地の測定などに比べて経済的であることや，様々な状況が数値シミュレーションを用いることによって簡単に模擬できるからである。（＊１）

では，現在の音響問題の解析方法は，どのように行われているのであろうか。一般には，定常音波を仮定し，音の伝播を支配する線形波動方程式を，時間，空間の式に分離して，解析的に，あるいは境界要素法などといった手法によって解いている。（＊２）

しかしながら，これらの手法は定常問題を仮定していることや，音の伝播を線形化しているために，適応範囲は限られてくる。例えば，室内の音響を把握しようとしたとき，クーラーなどの空調設備による，緩やかな空気の流れの影響などは無視されるし，突発的に発生した非定常音波の伝播状態の把握も難しい。

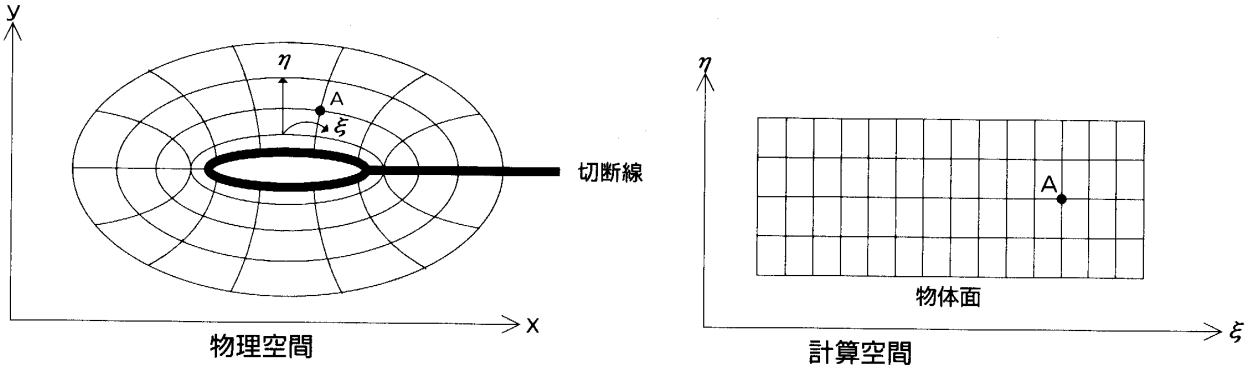
一方，流体力学の分野で用いられている基礎方程式やその数値解法では，上記の非線形的な

効果や，非定常現象を扱うことが可能である。流体力学では，計算しようとする空間を細かい格子に分割し，解くべき方程式を各格子点上の関係式に置き換え，近似計算によって各々の点の値を求めるという，いわゆる差分法に代表される離散化手法が用いられている。差分法などを室内の音響問題に適用する場合に起こりうる問題点は，音波が爆風や衝撃音のように強い圧力変動ではないため，精度のよい手法を使わないと，正確に音の伝播を捕えることができないことにある。したがって，通常の流体解析に比べ，より精度の高い手法が求められる。

また，離散化手法においては，計算空間を分割する格子によって，解の精度，収束性などが変わってくる。格子数が多ければ多いほど，より厳密解に近い解が得られるが，計算に要するコンピュータの記憶容量や演算性能にも限りがあるので，計算手法の開発と同様に，格子形成法も重要になってくる。(＊3)

ここでは，そういった背景のもとに，流体解析に対する有限差分法が，音波のような微小変動を扱う問題にどの程度有効であるかを確かめるために，2次元の音場解析を行う。

第2章では，まず音波の基本的な性質や，微小擾乱の音圧のレベル，音速を調べ，オイラー方程式に代表される圧縮性流体力学方程式に（＊4），微小変動を仮定して，音波の伝播を支配する波動方程式を導く。さらに，ホールなどの複雑な形状を取り扱うことを考えて，境界に合わせて格子分割を行う一般座標系という概念（図(A)参照）を導入し，物理空間内の計算領域を，計算空間に写像変換をほどこした方程式を導出する。



図(A)

3章では，高次精度風上差分法など4種類の既存の有限差分手法について述べる。(＊5)

4章では，2章で得られた基礎方程式を，3章の各手法を使って離散化し，例として，簡単な形状の領域内での音の伝播を解析する。

5章では，計算結果の検討を行ない，音の伝播に対する離散化手法の有効性を検証する。

2. 音波の基礎方程式

2.1 音波と音圧レベル

太鼓を叩くとその皮の振動が空気を伝わって我々の鼓膜に伝わり，音として感じ取られる。空間のある点に生じた状態変化が次々に伝わる現象を波といい，このように，空気のような圧縮性をもつ流体中を弾性振動が伝わる波を音波と呼んでいる。音波が伝わると，空気中のある点における圧力はわずかに変動し，変動の振動数が大きいほど高い音と感じ，振幅が大きいほど大きい音と感じる。

流体内の1点 (x,y,z) における密度を ρ_0，流体の圧力を P_0（空気中であれば大気圧）とする。音波がその点に達した時の密度が ρ，圧力が P になったとするとその点の音圧は，圧力の音波による変動分

$$P(t,x,y,z)=P-P_0 \tag{2.1}$$

で表わされる。

点 (x,y,z) に微小な体積 $\delta V=\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z$ を持った直六面体を考える。それが音波により $d(\xi,\eta,\zeta)$ という変位を受けるとともに体積が $\delta V'$ になったとする。変形が十分小さいのでこの体積は

$$\begin{aligned}\delta V'&=\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\Delta x\cdot\left(1+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\Delta y\cdot\left(1+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)\Delta z\\&\approx\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)\end{aligned} \tag{2.2}$$

となる。したがって，体積変化の割合は

$$\Delta=\frac{\delta V'-\delta V}{\delta V}=\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z} \tag{2.3}$$

で与えられる。

質量保存の法則から

$$\rho_s\delta V=\rho\delta V' \tag{2.4}$$

(2.3) 式より

$$\rho_s = \rho(1+\Delta) \tag{2.5}$$

密度変化の割合を s とすると，

$$\rho = \rho_s(1+s) \tag{2.6}$$

Δ や s は十分小さいから，$s=-\Delta$ がいえる。
Δ は膨張度，s は圧縮度と呼ばれる。音圧を p すると

$$p = -K\Delta = Ks \tag{2.7}$$

である。
ただし，K を体積弾性率といい，

$$dp = -K\frac{dV}{V} = K\frac{d\rho}{\rho} \tag{2.8}$$

で定義される係数である。

ある点の音圧 p は時間 t によって変化するので，音の強さを考える場合，音圧の実効値 p_e は，次式によって定義される。

$$p_e = \sqrt{\frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} p^2(t)\,dt} \tag{2.9}$$

このとき (2.9) 式の時間 t_0 は，音波の周期より十分大きくとり，t_0 のとり方が p_e に影響しないようにする。そして，p_e をデシベル単位で表わした L_p を音圧レベルといい，以下の式で表わされる。

$$L_p = 20\log_{10}\left(\frac{P_e}{P_{ref}}\right)\mathrm{dB} \tag{2.10}$$

p_{ref}は，1kHz の音を正常な人が感じる最小な音圧の実効値で，

$$p_{ref} = 2\times10^{-5}\mathrm{Pa} = 0.0002\mu\mathrm{bar} \tag{2.11}$$

である。電車通過時のガード下では，L_p は約 100dB で，そのときの具体的な値 p_e を計算してみると，式（2.10）により

$$p_e = p_{ref} \times 10^{L_p/20} = 2 \times 10^{-5} \times 10^5 \mathrm{Pa} = 2\ \mathrm{Pa} = 1.97 \times 10^{-5} \mathrm{atm} \tag{2.12}$$

である。この例からも音波の通過による圧力の変動は，大気圧の

$$1\ \mathrm{atm} = 1{,}013 \mathrm{mbar} = 101{,}325 \mathrm{N/m^2} = 101{,}325 \mathrm{Pa} \tag{2.13}$$

に比べて非常に小さいことがわかる。

2.2 音速

流体中を伝わる音波の速度 c は，(2.8) 式の体積弾性率 K と密度 ρ によって

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \tag{2.14}$$

で与えられることがわかっている。

ここで，音波の通過によって生じる流体の状態変化は，2.1 節でみたように極めて小さいため，等エントロピ（断熱的かつ可逆的）変化であると仮定し，空気中の音波の速度を求めてみよう。等エントロピ変化では，完全気体に対して，圧力 p と密度 ρ，比体積 V の間に次の関係式が成り立つ。（＊6）

$$pV^{\gamma} = const. \quad \text{または，} \frac{p}{\rho^{\gamma}} = const. \tag{2.15}$$

ただし，γ は気体の定圧比熱 c_p と定積比熱 c_v の比

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \tag{2.16}$$

である。(2.15) 式の対数をとって微分すると

$$\frac{dp}{dV} = -\gamma \frac{p}{V} \quad \text{または，} \frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho} \tag{2.17}$$

したがって，(2.8) 式より体積弾性率は

$$K=\gamma p \tag{2.18}$$

で与えられる。これにより，空気中の音波の速度は

$$c=\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \tag{2.19}$$

であることがわかる。この式が，実際とよく合うかを調べて見ると，空気の比熱比 $\gamma=1.402$ を用いて，0°C，1 気圧の乾いた空気中の速度は

$$c_0=\sqrt{\frac{1.402\times1.03\times10^6}{0.001293}}(\mathrm{cm}/s)=331.4(\mathrm{m}/s) \tag{2.20}$$

となり，実測値とよく合う。また，空気中の音速が圧力に無関係で温度によって変わることも，0°C，t°Cの圧力，密度をそれぞれ p_0,ρ_0,p,ρ とし，ボイルシャルルの法則

$$\frac{p}{\rho}=\frac{p_0}{\rho_0}\left(1+\frac{1}{273}t\right) \tag{2.21}$$

を (2.19) 式に代入すれば，t°Cでの音速 c_t は

$$c_1=\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}=\sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\left(1+\frac{1}{273}t\right)}\approx c_0\left(1+\frac{1}{546}t\right) \tag{2.22}$$

で与えられることにより理解できる。つまり，音速は 1°Cの上昇によって 0°Cの時の速度の約 $\frac{1}{546}\approx0.61(\mathrm{m}/s)$ ずつ増す。

2.3　直交座標系の音波の基礎方程式

ここでは，流体力学分野の圧縮性流体力学を支配する方程式から，音波の伝播を支配する波動方程式を求める。一般に，圧縮性非粘性流体を支配する方程式は，連続の式，運動量保存の式，エネルギー保存の式に気体の状態方程式を加えたものである。これらの式に微小変動の仮定を導入して，線形波動方程式を導く。 次元を含んだ物理量に無次元化を導入すると，圧縮性非粘性流体方程式（Euler 方程式）は次式で与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ e\end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}\rho u\\ p+\rho u^2\\ \rho uv\\ u(e+p)\end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ p+\rho v^2\\ v(e+p)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{2.23}$$

ただし，ρ は密度，p は圧力，e は内部エネルギー，$\vec{u}=(u,v)$ は流速とする。

完全流体内の等エントロピ変化を仮定した場合，圧縮性非粘性流体方程式のエネルギー保存の式は運動量保存の式と等価になり，省略できる。書き直すと

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}\rho u\\ p+\rho u^2\\ \rho uv\end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ p+\rho v^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{2.24}$$

である。音波の発生によって生じる変動項 ρ'，p'，u'，v' は非常に小さいものとして，微小変動の式

$$\rho=\rho_0+\rho',\ p=p_0+p',\ u=u_0+u',\ v=v_0+v', \tag{2.25}$$

を (2.24) 式に導入する。そして，ρ_0，p_0 は $const.$ $\vec{u}_0(u_0,u_0)=\vec{0}$ と置き，微小の値 ρ'，p'，u'，v' の高次の項を省略して，$u=u'$，$v=v'$ を代入すると，(2.24) 式は，微小変動 ρ'，p'，u'，v' に関する基礎方程式として次のように置き換えられる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\rho'\\ \rho_0 u'\\ \rho_0 v'\end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}\rho_0 u'\\ p'\\ 0\end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix}\rho_0 v'\\ 0\\ p'\end{bmatrix}=0 \tag{2.26}$$

一方，等エントロピ変化を仮定しているので (2.15) 式より，

$$p_0+p'\propto(\rho_0+\rho')^\gamma=\rho_0^\gamma\left(1+\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^\gamma,\qquad p_0\propto\rho_0^\gamma \tag{2.27}$$

がいえる。したがって，

$$\frac{p_0+p'}{\rho_0^{\gamma}\left(1+\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^{r}}=\frac{p_0}{\rho_0^{\gamma}} \tag{2.28}$$

上式を，書き直し展開して，ρ' の 2 次以上の項を省略すると

$$p'=-p_0+p_0(1+\frac{\rho'}{\rho_0})^{\gamma}=\gamma\frac{\rho'}{\rho_0}p_0+\cdots \tag{2.29}$$

ゆえに，(2.19) 式より $c_0^2=\frac{\gamma p_0}{\rho_0}$ を得ることになり

$$p'=c_0^2\rho' \tag{2.30}$$

がいえる。(2.30) 式を (2.26) 式に代入すれば，

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\rho'\\ \rho_0u'\\ \rho_0v'\end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}\rho_0u'\\ c_0^2\rho'\\ 0\end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix}\rho_0v'\\ 0\\ c_0^2\rho'\end{bmatrix}=0 \tag{2.31}$$

または，

$$\frac{\partial q'}{\partial t}+\frac{\partial F'}{\partial x}+\frac{\partial G'}{\partial y}=0 \qquad q'=\begin{bmatrix}\rho'\\ \rho_0u'\\ \rho_0v'\end{bmatrix} \quad F'=\begin{bmatrix}\rho_0u'\\ c_0^2\rho'\\ 0\end{bmatrix} \quad G'=\begin{bmatrix}\rho_0v'\\ 0\\ c_0^2\rho'\end{bmatrix} \tag{2.32}$$

行列系に書き直すと

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{q}+A_0\frac{\partial}{\partial x}\hat{q}+B_0\frac{\partial}{\partial y}\hat{q}=0$$

$$\hat{q}=\begin{bmatrix}\rho'\\ u'\\ v'\end{bmatrix} \qquad A_0=\begin{bmatrix}0 & \rho_0 & 0\\ c_0^2/p_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad B_0=\begin{bmatrix}0 & 0 & \rho_0\\ 0 & 0 & 0\\ c_0^2/p_0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{2.33}$$

が得られる。

次に一般に波動方程式と呼ばれている微分方程式を求めてみる。

運動の方程式を示している（2.26）式の2行，3行より

$$\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \tag{2.34}$$

$$\rho_0 \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial y} = 0 \tag{2.35}$$

(2.7) 式を t で微分すると，

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -K \frac{\partial \Delta}{\partial t} = -K \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) = -K\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\right) \tag{2.36}$$

さらに t で微分して，(2.34) 式，(2.35) 式と組み合わせると

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho_0}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) \tag{2.37}$$

つまり，

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c_0^2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) \tag{2.38}$$

この微分方程式は，2次元の波動方程式とよばれ，p が

$$c_0 = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} \tag{2.39}$$

という速度で流体の中を波として伝わることを示す式である。

2.4　一般座標系の音波の基礎方程式の導出

2.3節の直交座標系の基礎方程式を，一般座標系の音波の基礎方程式に書き直す。

物理空間座標：x, y
計算空間座標：ξ, η

とする。このときの，微分演算子は

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\eta & y_\eta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

である。

また，自明の関係

$$x = x(\xi(x,y), \eta(x,y)), \qquad y = y(\xi(x,y), \eta(x,y)) \tag{2.42}$$

を x，y で微分することにより，

$$1 = \xi_x x_\xi + \eta_x x_\eta \qquad 0 = \xi_y x_\xi + \eta_y x_\eta \tag{2.43}$$

$$0 = \xi_x y_\xi + \eta_x y_\eta \qquad 1 = \xi_y y_\xi + \eta_y y_\eta \tag{2.44}$$

が得られる。したがって，変換ヤコビアン J を次式で定義すると

$$J \equiv \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \tag{2.45}$$

(2.40) (2.41) 式または，(2.43) (2.44) 式から，次の変換の測度の関係式

$$\xi_x = J y_\eta, \quad \xi_y = -J x_\eta, \quad \eta_x = J y_\xi, \quad \eta_y = J x_\xi \tag{2.46}$$

を得る。(2.45) 式は，計算空間から物理空間への変換行列の行列式である。同様に物理空間から計算空間への変換行列の行列式を逆変換のヤコビアン J^{-1} とすると，次式で表わされる。

$$J^{-1} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \tag{2.47}$$

2.3 節で求めた，直交座標系の基礎方程式に，上の関係式を用いれば，

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{q'}{J}\right)+\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{J}(F'\xi_x+G'\xi_y)+\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{1}{J}(F'\eta_x+G'\eta_y)=0 \tag{2.48}$$

ただし，$q'=\begin{bmatrix}\rho' \\ \rho_0 u' \\ \rho_0 v'\end{bmatrix}$，　$F'=\begin{bmatrix}\rho_0 u' \\ c_0^2\rho' \\ 0\end{bmatrix}$，　$G'=\begin{bmatrix}\rho_0 v' \\ 0 \\ c_0^2\rho'\end{bmatrix}$ (2.49)

2行，3行の両辺を ρ_0 で割ると，

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\rho' \\ u' \\ v'\end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\rho_0 u'\xi_x+\rho_0 v'\xi_y \\ \frac{c_0^2}{\rho_0}\rho'\xi_x \\ \frac{c_0^2}{\rho_0}\rho'\xi_y\end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\rho_0 u'\eta_x+\rho_0 v'\eta_y \\ \frac{c_0^2}{\rho_0}\rho'\eta_x \\ \frac{c_0^2}{\rho_0}\rho\eta_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix} \tag{2.50}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{q}'+\begin{bmatrix}0 & \rho_0\xi_x & \rho_0\xi_y \\ \frac{c_0^2}{\rho_0}\xi_x & 0 & 0 \\ \frac{c_0^2}{\rho_0}\xi_y & 0 & 0\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial \xi}\tilde{q}'+\begin{bmatrix}0 & \rho_0\eta_x & \rho_0\eta_y \\ \frac{c_0^2}{\rho_0}\eta_x & 0 & 0 \\ \frac{c_0^2}{\rho_0}\eta_y & 0 & 0\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial \eta}\tilde{q}'=\begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix} \tag{2.51}$$

ただし，$\tilde{q}'=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\rho' \\ u' \\ v'\end{bmatrix}$ (2.52)

これが，等エントロピ変化を仮定し，完全流体内を伝播する音波の一般座標系の基礎方程式である。

3.　離散化による数値計算法

2.4節で求めた基礎方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{q}'+A\frac{\partial}{\partial \xi}\tilde{q}'+B\frac{\partial}{\partial \eta}\tilde{q}'=0 \tag{3.1}$$

$$\hat{q}'=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\rho'\\ u'\\ v'\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}0 & \rho_0\xi_x & \rho_0\xi_y\\ \frac{c_0^2}{\rho_0}\xi_x & 0 & 0\\ \frac{c_0^2}{\rho_0}\xi_y & 0 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & \rho_0\eta_x & \rho_0\eta_y\\ \frac{c_0^2}{\rho_0}\eta_x & 0 & 0\\ \frac{c_0^2}{\rho_0}\eta_y & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{3.2}$$

をいくつかの手法で離散化し，2次元の音場解析を試みる。そして，計算結果を比較検討する。 一方，それぞれの行列 A，B は対角化可能で A，B の固有ベクトル行列を Λ，Λ'，右固有ベクトルを R，R'左固有ベクトルを R^{-1}，R'^{-1} とすると，$A=R\Lambda R^{-1}$，$B=R'\Lambda'R'^{-1}$ と書ける。これらの行列は3.3節と，3.4節で述べる手法に必要であるため，A，B の固有値と右，左ベクトルを各々求める。

$$\Lambda=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & c_0\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2} & 0\\ 0 & 0 & -c_0\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2}\end{bmatrix},\quad \Lambda'=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & c_0\sqrt{\eta_x^2+\eta_y^2} & 0\\ 0 & 0 & -c_0\sqrt{\eta_x^2+\eta_y^2}\end{bmatrix} \tag{3.3}$$

$\omega=\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2}$，$\omega'=\sqrt{\eta_x^2+\eta_y^2}$ とおくと

$$R=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{\xi_y}{\omega} & \frac{c_0\xi_x}{\sqrt{2}\rho_0\omega} & -\frac{c_0\xi_x}{\sqrt{2}\rho_0\omega}\\ -\frac{\xi_x}{\omega} & \frac{c_0\xi_y}{\sqrt{2}\rho_0\omega} & -\frac{c_0\xi_y}{\sqrt{2}\rho_0\omega}\end{bmatrix},\quad R^{-1}=\begin{bmatrix}0 & \frac{\xi_y}{\omega} & -\frac{\xi_x}{\omega}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\rho_0\xi_x}{\sqrt{2}c_0\omega} & \frac{\rho_0\xi_y}{\sqrt{2}c_0\omega}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\rho_0\xi_x}{\sqrt{2}c_0\omega} & -\frac{\rho_0\xi_y}{\sqrt{2}c_0\omega}\end{bmatrix} \tag{3.4}$$

$$R'=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{\eta_y}{\omega'} & \frac{c_0\eta_x}{\sqrt{2}\rho_0\omega'} & -\frac{c_0\eta_x}{\sqrt{2}\rho_0\omega'}\\ -\frac{\eta_x}{\omega'} & \frac{c_0\eta_y}{\sqrt{2}\rho_0\omega'} & -\frac{c_0\eta_y}{\sqrt{2}\rho_0\omega'}\end{bmatrix},\quad R'^{-1}=\begin{bmatrix}0 & \frac{\eta_y}{\omega'} & -\frac{\eta_x}{\omega'}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\rho_0\eta_x}{\sqrt{2}c_0\omega'} & \frac{\rho_0\eta_y}{\sqrt{2}c_0\omega'}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\rho_0\eta_x}{\sqrt{2}c_0\omega'} & -\frac{\rho_0\eta_y}{\sqrt{2}c_0\omega'}\end{bmatrix} \tag{3.5}$$

3.1 Lax の差分法

Lax 法と呼ばれる，安定性の高い1次精度の計算方法の概略を以下に示す。ただし，Δt は時間分割の積分幅，Δx，Δy は空間分割の積分幅を意味している。

$$q_{j,k}^{n+1}=\frac{1}{4}(q_{j-1,k}^{n}+q_{j+1,k}^{n}+q_{j,k-1}^{n}+q_{j,k+1}^{n})$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}A(q_{j+1,k}^{n}-q_{j-1,k}^{n})-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta y}B(q_{j,k+1}^{n}+q_{j,k-1}^{n}) \tag{3.6}$$

以下，上添字 n は時間変数 $t=n\Delta t$ における値を，下添字 j，k は空間変数 $x=j\Delta x$，$y=k\Delta y$ における値を意味している。(3.6) 式を $t=0$ から，漸近的に時間発展的な解を求めていくことで各時間に対する全空間の解が得られる。実際には，この式の q を $\tilde{q}'$ と考え，$\tilde{q}'$ にヤコビアン J をかけて，q' の値を求める。

3.2 MacCormack の差分法

MacCormack の方法では，線形問題に対しては，Lax-Wendroff の方法と呼ばれているものと同じである。しかし，この方法は $j+\frac{1}{2}$，$k+\frac{1}{2}$ の点の値を計算することなく，格子点上の値だけで手法を記述できる利点があり，時間項は 2 段階で Δt の積分を行う。

$$\textit{step 1:}\ \bar{q}_{jk}=q_{j,k}^{n}-\frac{\Delta t}{\Delta x}A(q_{j+1,k}^{n}-q_{j,k}^{n})-\frac{\Delta t}{\Delta y}B(q_{j,k+1}^{n}-q_{j,k}^{n}) \tag{3.7}$$

$$\textit{step 2:}\ q_{j,k}^{n+1}=\frac{1}{2}\{(q_{j,k}^{n}+\bar{q}_{j,k})-\frac{\Delta t}{\Delta x}A(\bar{q}_{j,k}-\bar{q}_{j-1,k})-\frac{\Delta t}{\Delta y}B(\bar{q}_{j,k}-\bar{q}_{k-1})\} \tag{3.8}$$

3.3 MUSCL を用いた Roe の高次精度風上差分法

この方法は，1 次風上差分法が TVD 条件を満たすことに注目して，$j+\frac{1}{2}$，$k+\frac{1}{2}$ の右，左の物理量 q_R，q_L を，それを取り囲むいくつかの位置での物理量 $q_{j-1,k}$，$q_{j,k}$，$q_{j+1,k}$ あるいは $q_{j,k-1}$，$q_{j,k}$，$q_{j,k+1}$ 等などから MUSCL 内挿法と呼ばれる方法によって決定し，数値流束を計算する仕方を取り入れている。つまり，流束制限関数を内挿の過程に導入することで，TVD 条件を満たし，導入しないときは単純な高次精度の風上差分法になる。この手法はつぎのように記述される。

$$q_{j,k}^{n+1}=q_{j,k}^{n}-\frac{\Delta t}{\Delta x}(\tilde{f}_{j+\frac{1}{2},k}^{n}-\tilde{f}_{j-\frac{1}{2},k}^{n})-\frac{\Delta t}{\Delta y}(\tilde{g}_{j,k+\frac{1}{2}}-\tilde{g}_{j,k-\frac{1}{2}}^{n}) \tag{3.9}$$

ただし，$\tilde{f}_{j+\frac{1}{2},k}^{n}=\frac{1}{2}\{(f_{L,k}^{n}+f_{R,k}^{n})-|A|(q_{R,k}^{n}-q_{L,k}^{n})\}$ (3.10)

$$\tilde{g}_{j,k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\{(g^{n}_{j,L}+g^{n}_{j,R})-|B|(q^{n}_{j,R}+q^{n}_{j,L})\} \tag{3.11}$$

$$|A|=R|\Lambda|R^{-1}, \quad |B|=R'|\Lambda'|R'^{-1} \tag{3.12}$$

$$f=Aq, \quad g=Bq \tag{3.13}$$

3.4 Yee-Harten の高次精度風上差分法

Yee-Harten の高次精度風上差分法は，3.3 節で述べた手法と同様に TVD 条件を満足し，修正流束を導入して大局的に高次精度を維持している方法であり，次のように記述される。

$$q^{n+1}_{j,k}=q^{n}_{j,k}-\frac{\Delta t}{\Delta x}(\tilde{f}^{n}_{j+\frac{1}{2},k}-\tilde{f}^{n}_{j-\frac{1}{2},k})-\frac{\Delta t}{\Delta y}(\tilde{g}_{j,k+\frac{1}{2}}-\tilde{g}^{n}_{j,k-\frac{1}{2}}) \tag{3.14}$$

ただし，$\tilde{f}^{n}_{j+\frac{1}{2},k}=\frac{1}{2}\{(f^{n}_{j+1,k}+f^{n}_{j,k})+R_{j+\frac{1}{2}}\Phi^{n}_{j+\frac{1}{2},k}$ (3.15)

ベクトル $\Phi^{n}_{j+\frac{1}{2}}$ の各成分は次のように書かれる。

$$\phi^{l}_{j+\frac{1}{2}}=\sigma(c^{l}_{j+\frac{1}{2}})(h^{l}_{j}+h^{l}_{j+1})-\Psi\left(c^{l}_{j+\frac{1}{2}}+\gamma^{l}_{j+\frac{1}{2}}\right)\alpha^{l}_{j+\frac{1}{2}} \tag{3.16}$$

$$\alpha^{n}_{j+\frac{1}{2}}=R^{-1}_{j+\frac{1}{2}}(q^{n}_{j+1}-q^{n}_{j}) \tag{3.17}$$

$$\gamma^{l}_{j+\frac{1}{2}}=\sigma(\lambda^{l}_{j+\frac{1}{2}})\frac{h^{l}_{j+1}-h^{l}_{j}}{\alpha^{l}_{j+\frac{1}{2}}} \tag{3.18}$$

$$c^{l}_{j+\frac{1}{2}}=\begin{cases} u_{j+\frac{1}{2}}=\tilde{u} & l=1 \\ (u+c)_{j+\frac{1}{2}}=\tilde{u}+\tilde{c} & l=2 \\ (u-c)_{j+\frac{1}{2}}=\tilde{u}-\tilde{c} & l=3 \end{cases} \tag{3.19}$$

h^{l}_{j} は次のように定義するリミター関数である。

$$h^{l}_{j}=min\ \ mod(\alpha^{l}_{j+\frac{1}{2}},\alpha^{l}_{j-\frac{1}{2}}) \tag{3.20}$$

$\sigma(z)$，$\Psi(z)$ は次の関数で表わされる。

$$\sigma(z)=\frac{1}{2}[\Psi(z)-\frac{\Delta t}{\Delta x}z^2] \tag{3.21}$$

$$\Psi(z)=|z| \tag{3.22}$$

ただし，$\tilde{g}$ も $\tilde{f}$ と同様に上式のように表される。

4. 数値計算の条件と問題設定

4.1 初期条件

物理的な状況として，長さ 1m を代表長さ L として，約 73m²程度の面積をもつ四辺形の中での 2 次元の音波の伝播を考える。領域のほぼ中心から発生した音源として，周波数 80Hz 程度の非定常の突発的な音圧波を仮定する。その形として，第 1 図のような正弦波（純音）の波形を考え，問題が線形なので強さは任意とする。瞬間的に発生した音圧波は，中心から外へ円周状に伝播していく波と，中心に集まる波に分かれる。前者の波の振幅は音源の中心から離れるに従って減衰する。後者の波は音響学ではあまり重要でないので，ここでは，まず中心から外へ広がる p' の分布に着目し，p' の時間変化を漸近的に求めた物理量の変動を各手法で比較する。

p', ρ', u', v' の，初期条件は次のように与える。

$$\rho'=\begin{cases} 3\cos(\sqrt{x^2+y^2}) & \left(x^2+y^2=\frac{\pi}{2}\text{のとき}\right) \\ 0 & \left(x^2+y^2\neq\frac{\pi}{2}\text{のとき}\right) \end{cases} \tag{4.1}$$

$$p'=c_0^2\rho' \tag{4.2}$$

$$(u', v')=\tilde{0} \tag{4.3}$$

$$\rho_0=1,\ c_0=1 \tag{4.4}$$

したがって，

$$p'=\rho' \tag{4.5}$$

上式により，ρ' の時間変化を漸近的に求めて，それを p' の分布とする。

5. 計算結果と検討

5.1 2次元の計算結果

第3図〜第6図は，x 方向に51ポイント，y 方向に51ポイント，合計2651個の格子点を取り，クーラン数0.49，$\Delta t=0.06$ 秒の10ステップごとに

(1) Lax
(2) MacCormack
(3) MUSCL
(4) Yee-Harten

の計算手法を使って音圧の時間変化をシミュレーションした結果である。

第2図は4.1節で与えた初期条件，$x^2+y^2=\frac{\pi}{2}$ を満足する点を $A=(x_0, y_0)$ とし，t の変化にともなって変わる点 A における音圧の振幅の変化を，各手法ごと示したものである。

5.2 検討結果

総合的に音波の伝播を数値流体で解析する際，検討の対象に考えることは，

(1) 解の減衰をいかに抑えるか。
(2) 波長にいくつの格子数をとれば，phase error を抑えることができるか。
(3) 高周波数の伝播は捕えられるか。

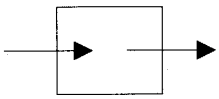
(1)で述べたように，いかに波の波形が崩れず，振幅が音源の中心からの距離 r に逆比例して減衰していくかを対象にすると MacCormack が一番良い結果を示している（第2図参照)。MacCormack は1次元のときも精度の良い結果が得られている。(＊7)

(2)はクーラン数との関連があるが，各手法とも CFL = 0.49 にしているので phase error の比較ができる。今回の計算では，1波長に x 軸方向に13個の格子点，y 軸方向に12個の格子点をとっているので，phase error は各手法とも抑えられている。

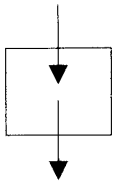
(3)について，この例題は80Hz程度の人間の発声する範囲の音波を取り扱ったので高周波数の波について，比較はしていない。

一方，今回は一般座標系の導入をおこなったが，基本的には物理空間に四角形の格子を用いているため，直交座標の場合とあまりかわっていない。1次元のときと違って，格子の形に計

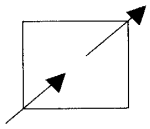
算結果がすくなからず影響されるという現象が起こっている。つまり，



a 図



b 図



c 図

a 図，及び b 図のように格子に垂直に波が伝播する場合は問題がないが，c 図の場合，解が少し振動する。それが顕著に現われているのが MacCormack である。第 4 図をみるとよくその現象が起きているのがよく解かる。この手法は波の伝播方向によっては格子の取り方に影響を受けやすい。Lax においては，明らかに解のなまりがいちじるしいので上のような現象は認められない。Yee と MUCUL の方法は，格子の取り方にあまり影響されていない。

総合的な結果としては，振幅の減衰は一番少ないのは MacCormack だが，解の振動がみられるので，格子数を少しふやして解の精度を上げ，高次精度風上差分法の MUCUL を利用するのが音波の伝播扱うのに有効であるように思える。

5.3　問題点と今後の展望

実際の解析となると 3 次元の格子を考えなければいけないので，非常に格子数が多くなる。格子の取り方に影響を受けず，少ない格子数でさらに精度の良い結果を得るため，手法の有効性を問うのと同時に，格子生成にも工夫が必要である。後者の場合は複雑な形状を得意とする非構造格子を取り入れたり，適合格子の利用などがある。前者の場合，新たな手法の開発も考えられるが，最近，学会で「Leapfrog の手法に風上差分を取り入れた手法が，音場解析に有効である」（＊ 8）という論文が発表された。次回は既存の方法と比較した上で，非構造格子を検討してみてはと思っている。

（本学助教授＝情報図学，教育方法論担当）

参考文献

（＊１）保原充,大宮司久明編 「数値流体力学　基礎と応用」 東京大学出版会（1990）

（＊２）ACOUST/BOOM「３次元汎用音場解析プログラム」 株式会社日本総合研究所

（＊３）日本機会学会編 「流れの数値シミュレーション」 コロナ社

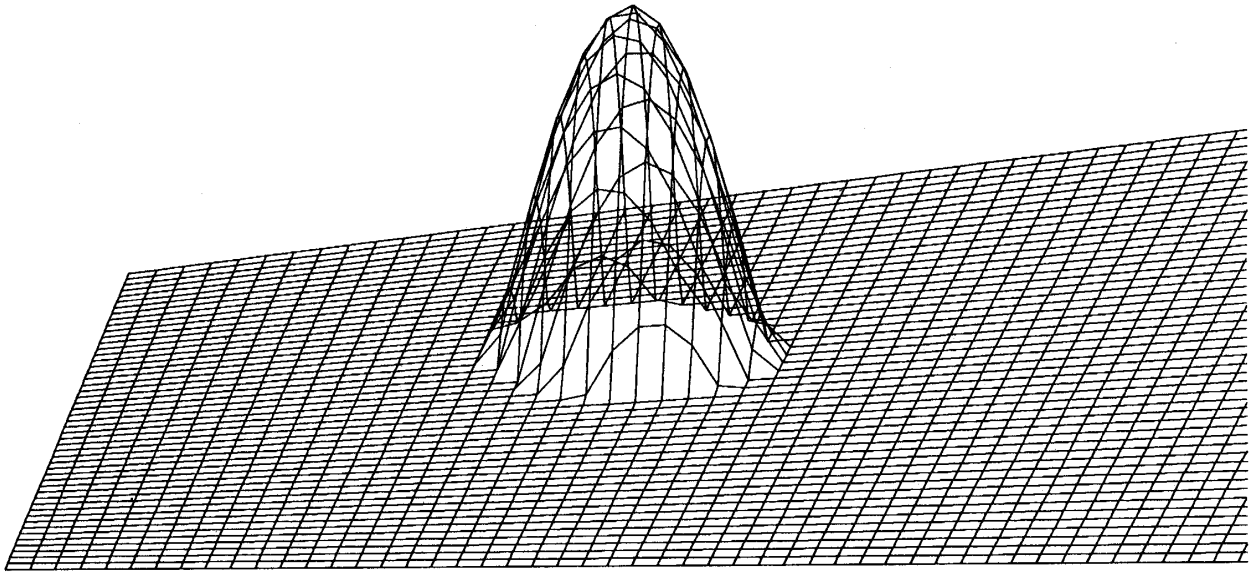
（＊４）今井功 「流体力学」 裳華房　（1976）

（＊５）藤井孝蔵 「圧縮性流体方程式に対する高次精度風上差文法の基礎」 日本機会学会講習資料（1990）

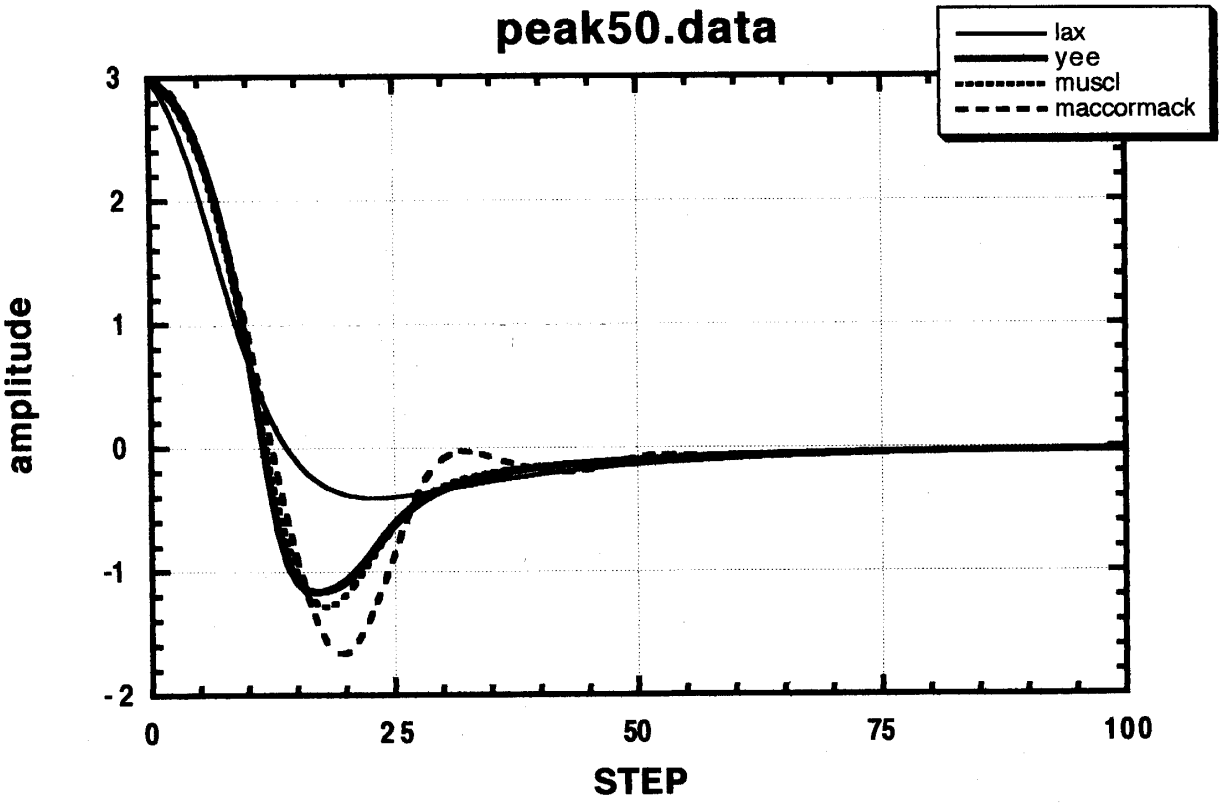
（＊６）松尾一泰,国清行夫,長尾健共著 「やさしい流体力学」 森北出版株式会社

（＊７）村中洋子 「離散化による音の伝播の数値解析法について」 東京音楽大学研究要第14集（1990）

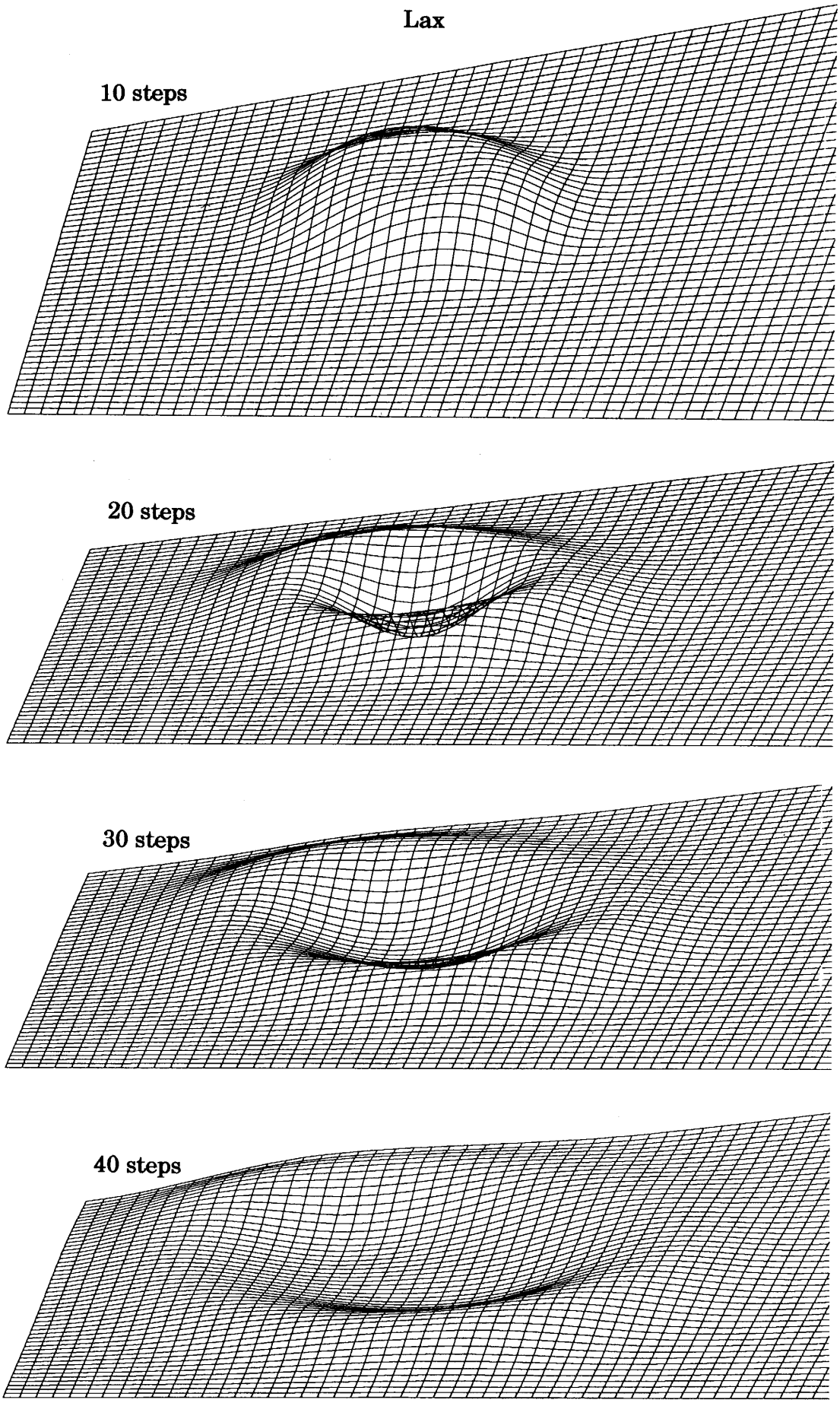
（＊８）Philip Roe "Long Range Numerical Propagation of High-Frequenccy waves" ISCFD the 5 th(1993)



第１図

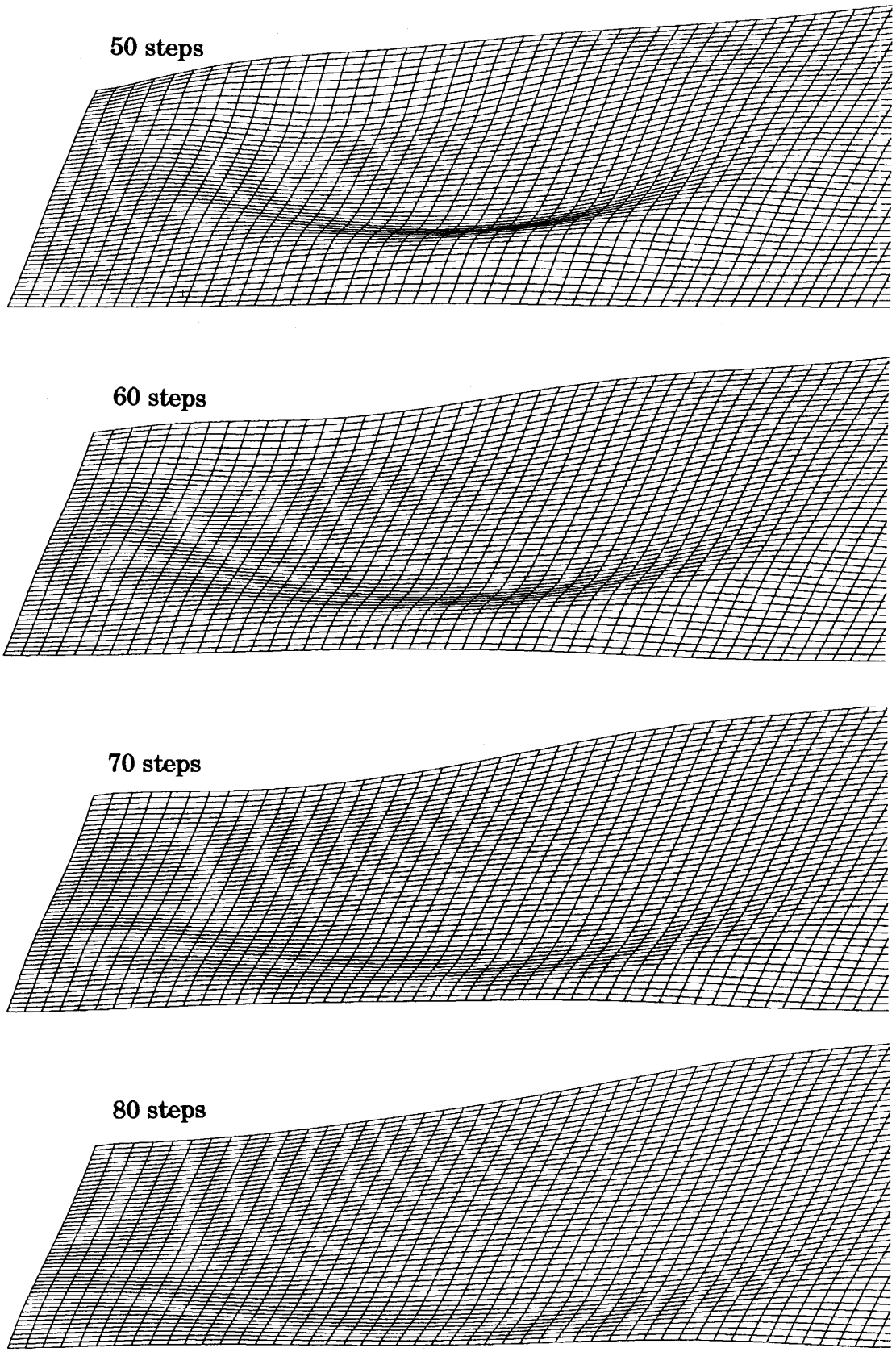

peak50.data
lax
yee
muscl
maccormack
amplitude
3
2
1
0
-1
-2
0
25
50
75
100
STEP

第２図

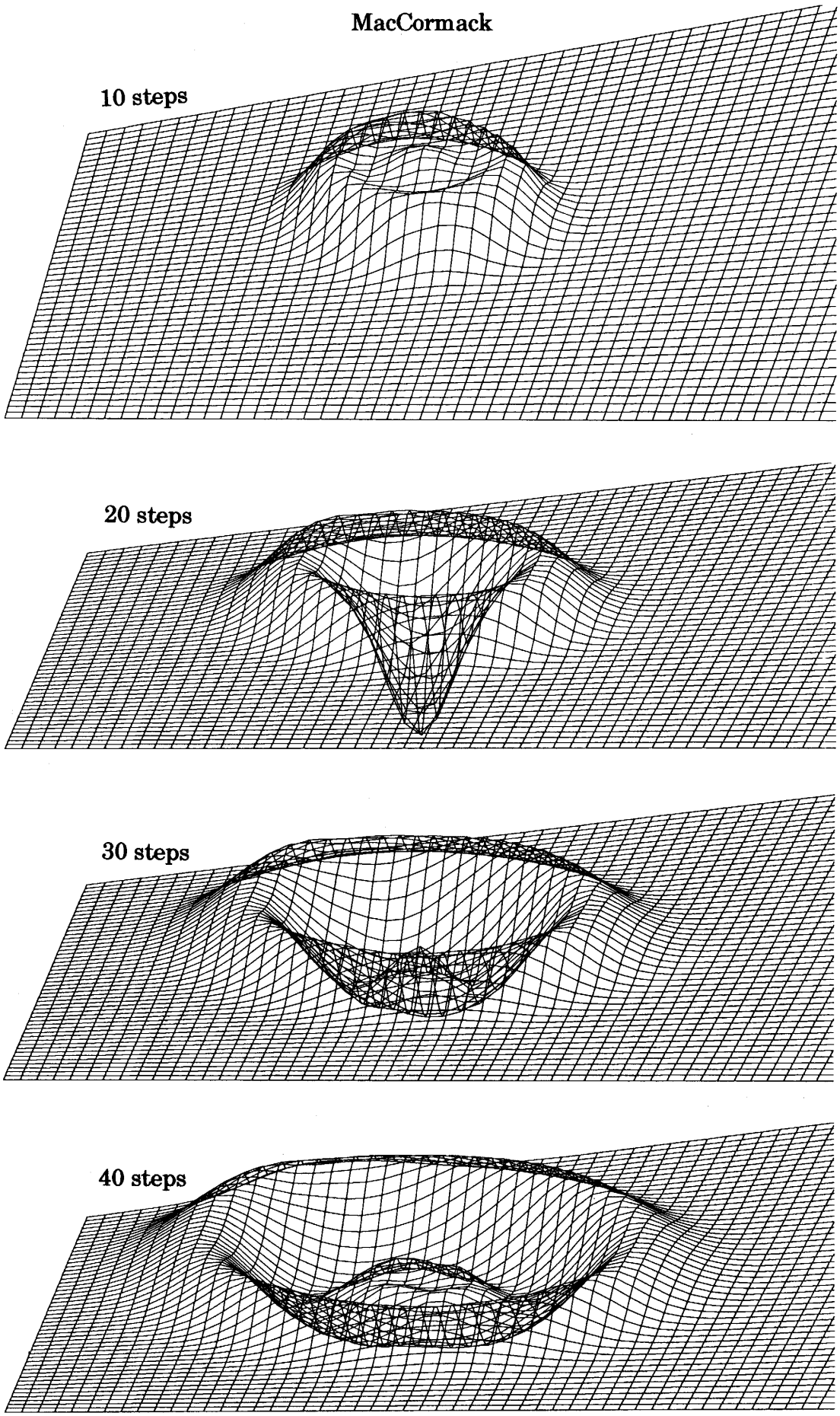


第 3 図（a）

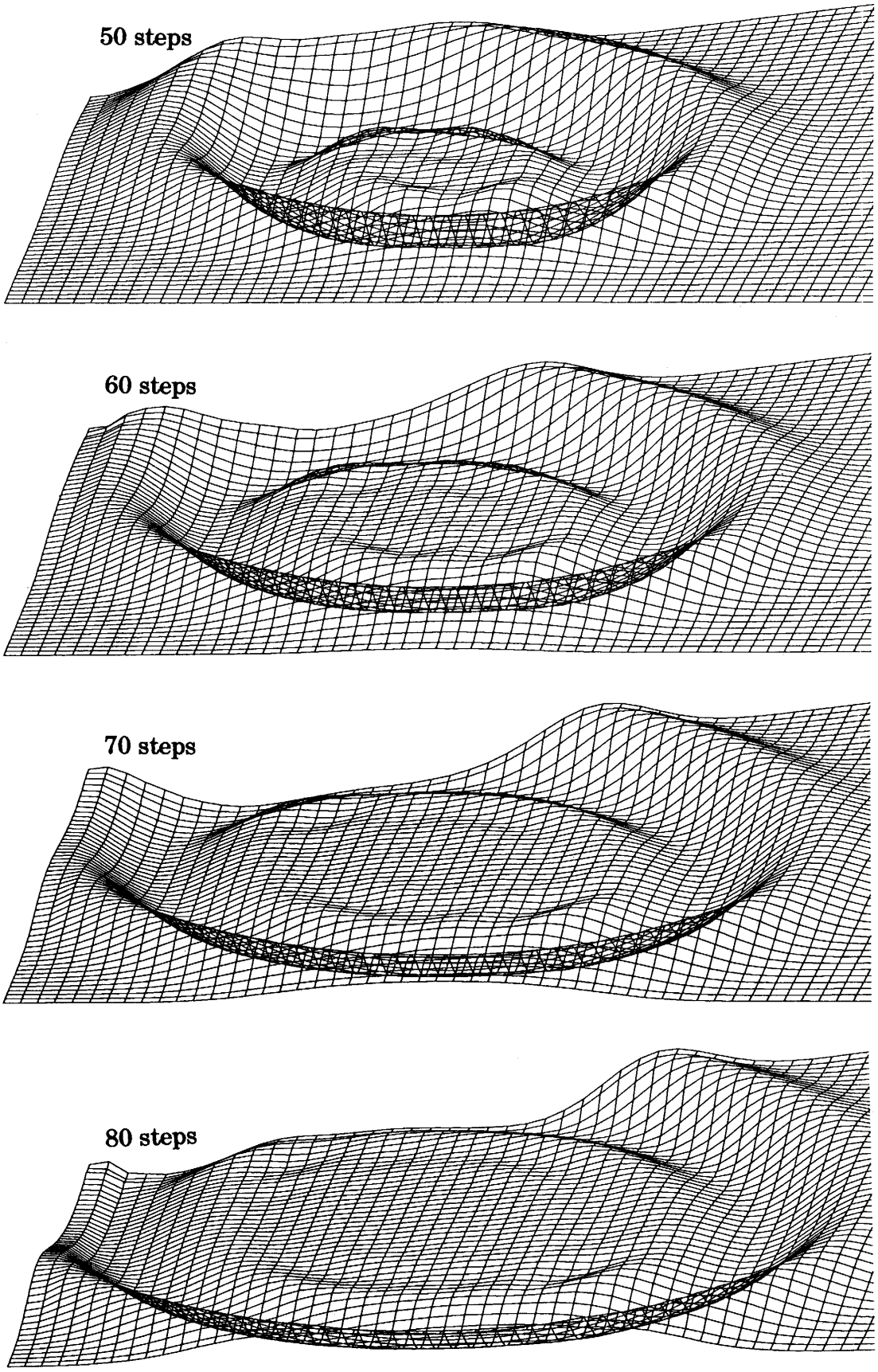
Lax



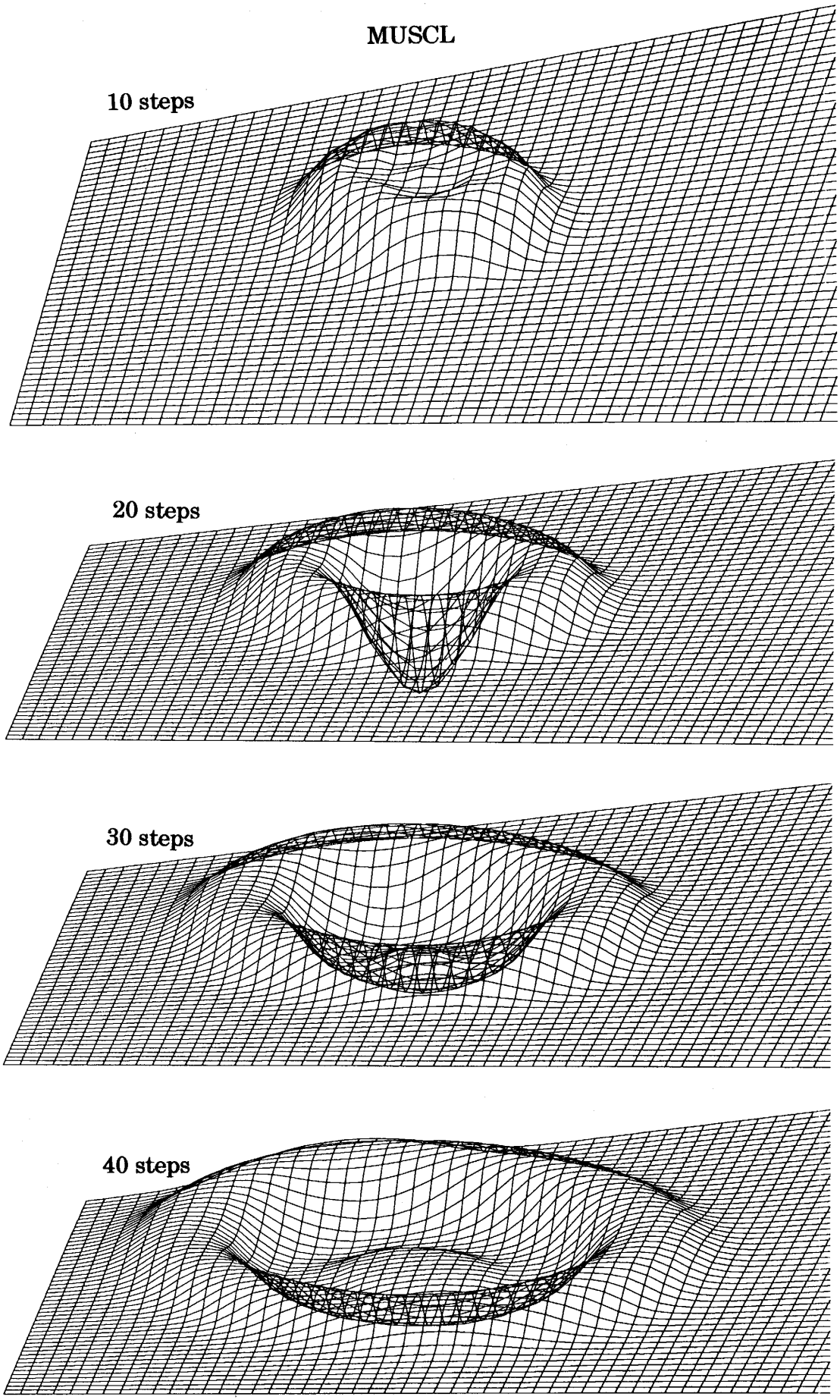
第3図（b）



第4図（a）

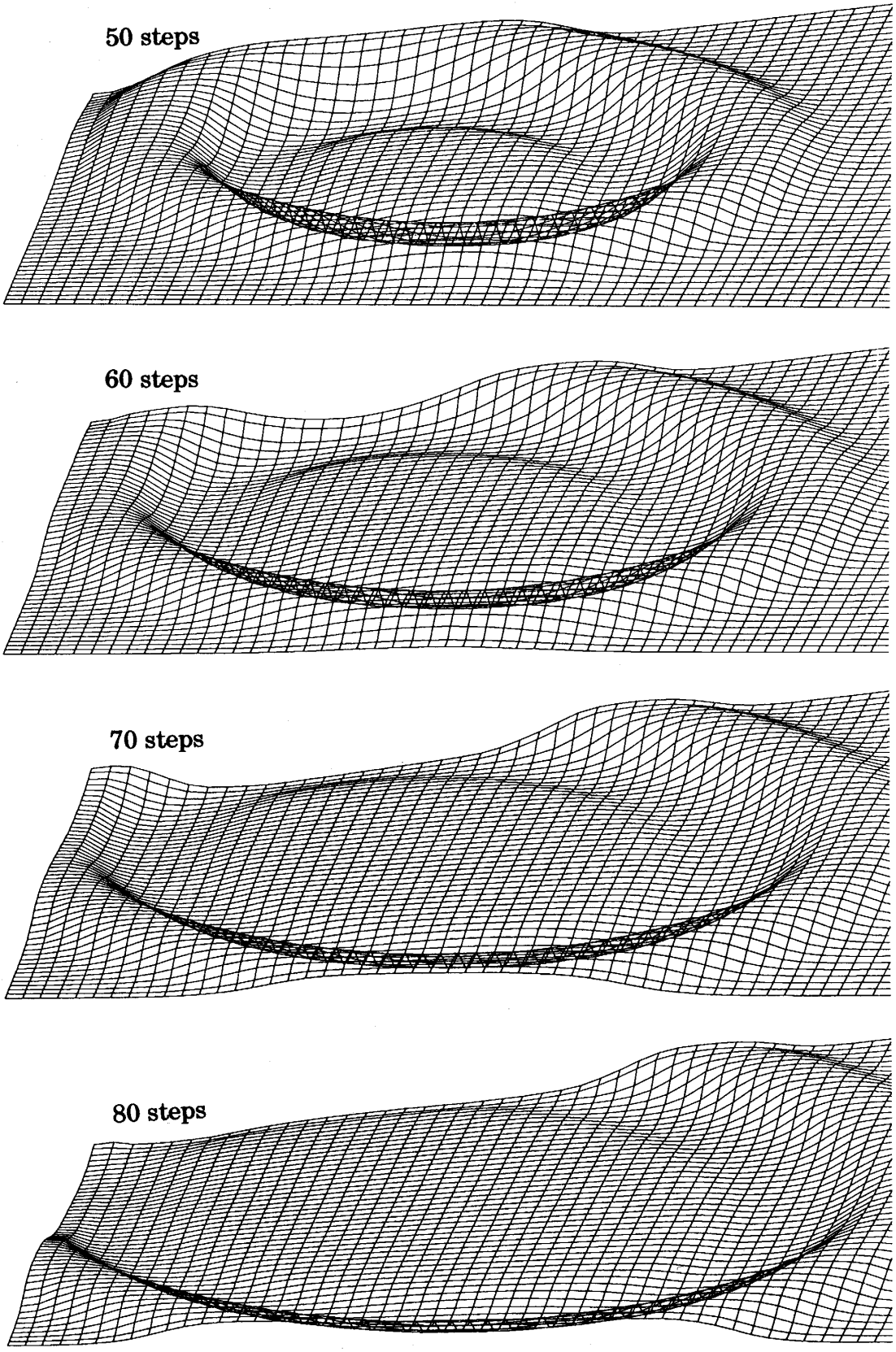


第4図（b）

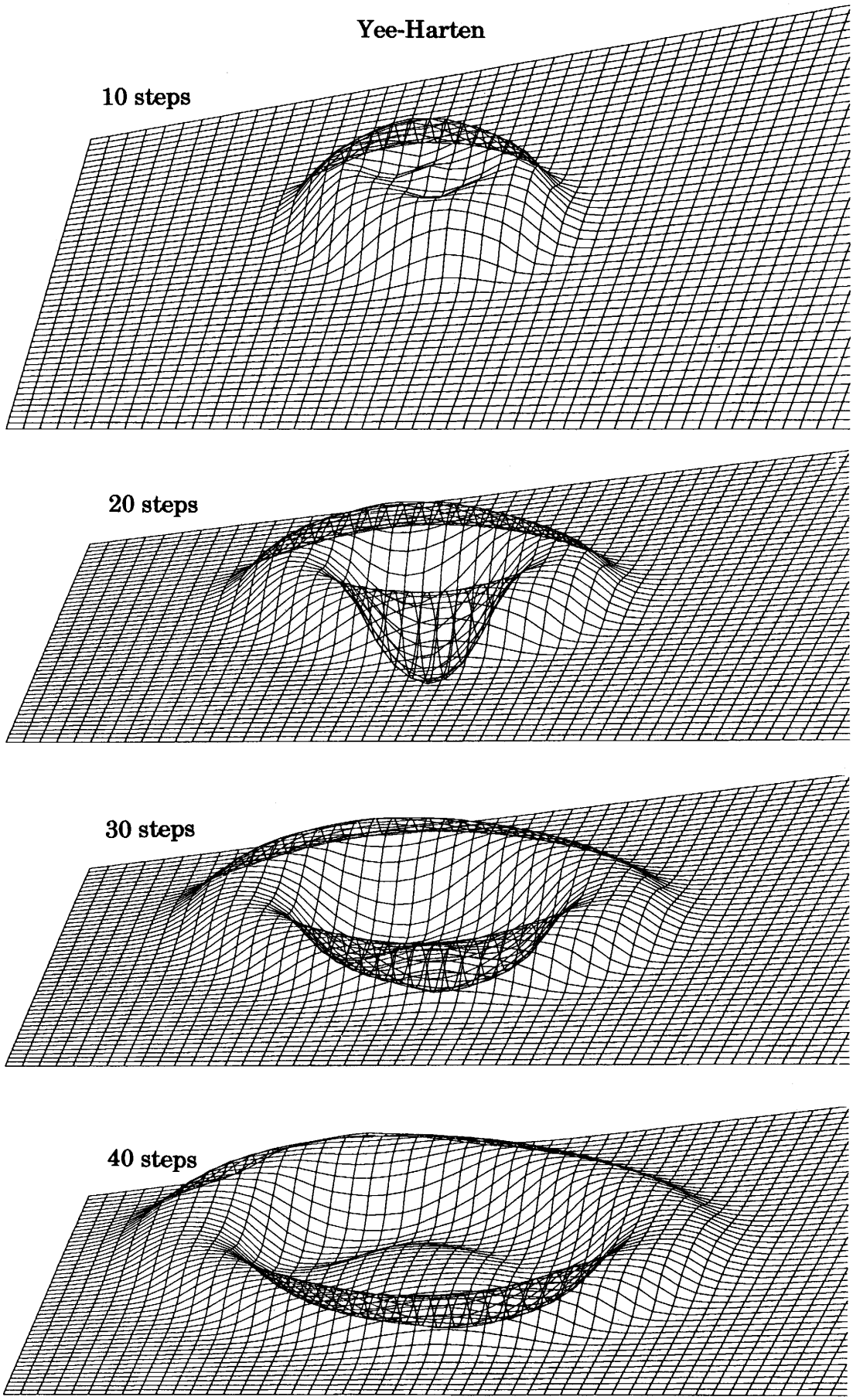


第5図（a）

MUSCL

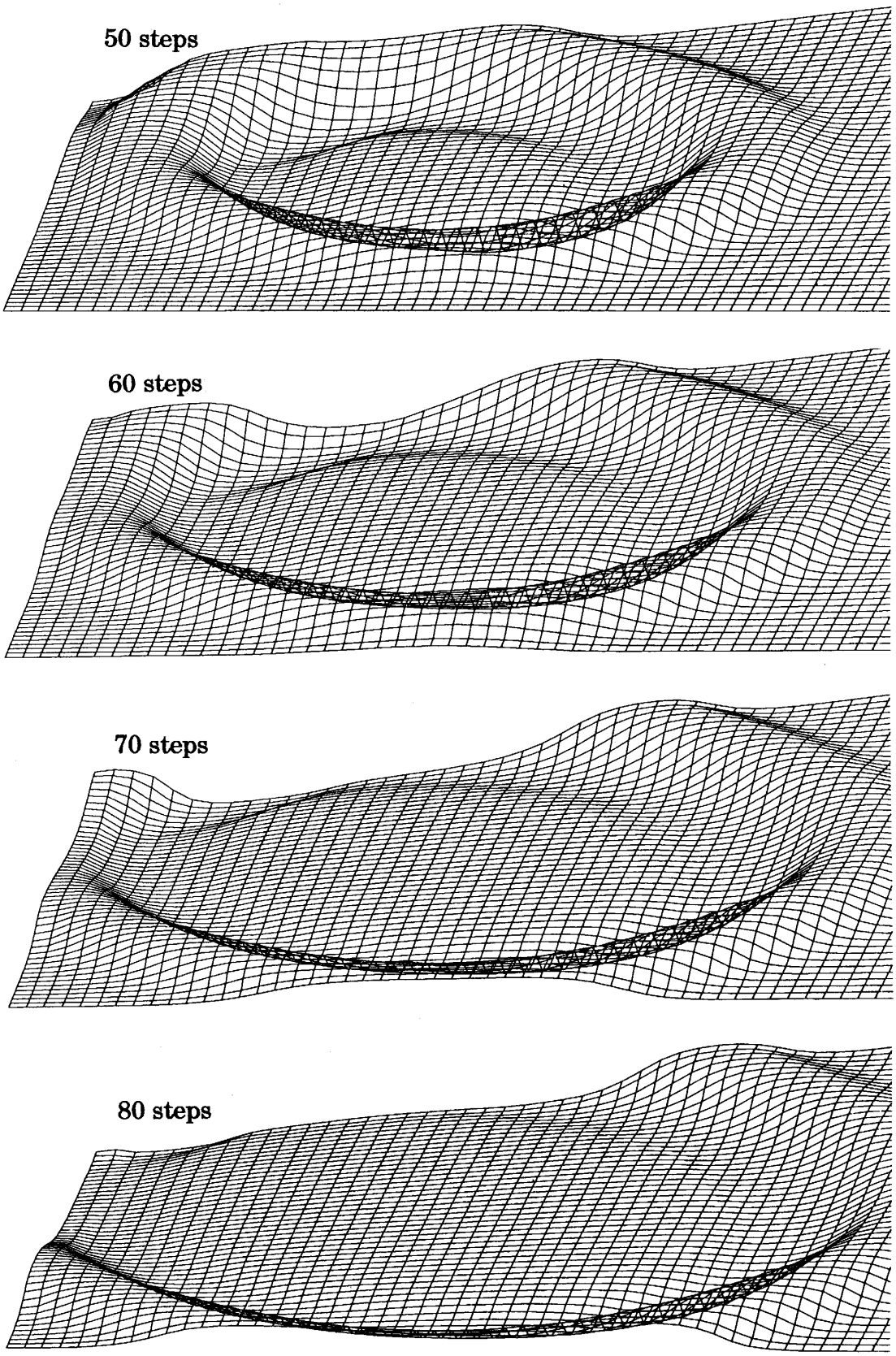


第5図（b）



第6図（a）

Yee-Harten



第6図（b）